CONCOURS NATIONAL D'ADMISSION DANS LES GRANDES ECOLES D'INGENIEURS

(Concours national DEUG)

Epreuve commune à 2 options (Mathématiques et Physique)

MECANIQUE - PARTIE II

Mardi 17 mai : 16 h 15 - 18 h 15

N.B. : le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Les calculatrices sont interdites

Le sujet comporte trois exercices indépendants.

Exercice 1

Le système S est un haltère formé par (voir figure 1, page 2) :

- une barre rectiligne {B} homogène, de longueur L et de masse m ; le point G est le milieu de cette barre ;
- 2 objets ponctuels identiques, M_1 et M_2, chacun de masse M, fixés aux extrémités de la barre.

On définit deux référentiels :

- le référentiel terrestre $\mathfrak{R}$t, galiléen, rapporté au repère orthonormé direct $\{G, \vec{u}_{xo}, \vec{u}_{yo}, \vec{u}_{zo}\}$, $\vec{u}_{zo}$ définissant la verticale ascendante ;
- le référentiel $\mathfrak{R}$, lié à la barre, rapporté au repère orthonormé direct $\{G, \vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z\}$, avec $\vec{u}_z = \vec{u}_{zo}$: la barre est fixe dans $\mathfrak{R}$ et fait, dans le plan $(\vec{u}_x, \vec{u}_z)$, un angle α constant avec l'axe (G, $\vec{u}_z$).

Cet haltère est mis en rotation à la vitesse $\vec{\Omega} = \Omega(t)\, \vec{u}_{zo}$ autour de l'axe vertical Δ fixe dans $\mathfrak{R}$t par un organe (non représenté) exerçant en G une action mécanique de résultante $\vec{F}_G$ et de moment résultant $\vec{\Gamma}_G$. Ω dépend du temps.

Les données sont : α, M, L, m, l'intensité de la pesanteur g et Ω.

Dans toute la suite, on raisonne dans le référentiel $\mathfrak{R}$t, mais on donnera les composantes des vecteurs dans la base ($\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z$).

1.1 Déterminer, en fonction des données, les coefficients de la matrice d'inertie $[I_G]_{\mathfrak{R}}$ de la barre {B}, calculée au point G dans le référentiel $\mathfrak{R}$.

Présenter clairement les résultats sous forme d'une matrice : $\begin{bmatrix} Ix & -I_A & -I_B \\ -I_A & Iy & -I_C \\ -I_B & -I_C & Iz \end{bmatrix}$.

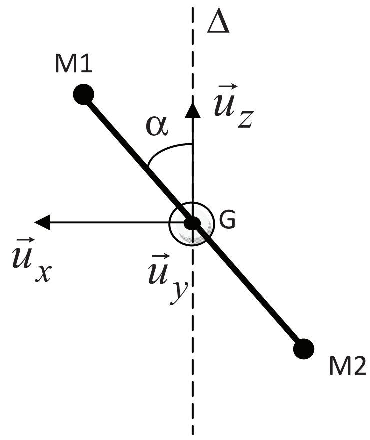


Figure 1

1.2 Déterminer les composantes dans la base ($\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z$) :

1.2-a. du moment cinétique $\vec{L}_{GB/\mathfrak{R}t}$ de la barre {B}, calculé en G, dans le référentiel $\mathfrak{R}$t ;

1.2-b. du moment cinétique $\vec{L}_{G1/\mathfrak{R}t}$ et $\vec{L}_{G2/\mathfrak{R}t}$ des objets ponctuels M_1 et M_2, calculé en G, dans le référentiel $\mathfrak{R}$t.

1.2-c. Le moment cinétique total $\vec{L}_{G/\mathfrak{R}t}$ de S calculé en G, dans le référentiel $\mathfrak{R}$t, se met sous la forme : $\vec{L}_{G/\mathfrak{R}t} = \Omega[\,A\vec{u}_x + B\vec{u}_y + C\vec{u}_z\,]$; déterminer A, B et C en fonction des données.

Dans toute la suite, sauf à la question 1.5, on utilisera, sans les expliciter, les coefficients A, B et C.

1.3 Déterminer les composantes du moment résultant $\vec{\Gamma}_G$.

1.4 Déterminer les composantes de la résultante $\vec{F}_G$.

1.5 Expliciter les composantes de $\vec{\Gamma}_G$ dans le cas où m = 0 et Ω conserve une valeur Ωo constante au cours du temps.

Exercice 2

On cherche à comprendre les résultats précédents **en raisonnant dans le référentiel $\mathfrak{R}$, non galiléen. On donnera les composantes des vecteurs dans la base ($\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z$).**

On reprend donc le dispositif de la figure 1, mais en considérant que la barre de l'haltère a une masse négligeable devant celle des objets ponctuels M_1 et M_2.
Le problème se ramène donc à un haltère {S} formé de 2 objets ponctuels (M_1, M_2), chacun de masse M, rigidement liés à une barre de longueur L et de masse nulle, inclinée d'un angle α constant par rapport à l'axe vertical Δ de direction fixe dans le référentiel terrestre $\mathfrak{R}$t.
S est mis en rotation autour de Δ par un organe agissant en G.
Dans toute la suite, la vitesse de rotation ne dépend plus du temps : $\vec{\Omega} = \Omega o\,\vec{u}_{zo}$, Ωo restant constante.

L’écriture des relations de la dynamique de S dans $\mathfrak{R}$ fait intervenir des forces d’inertie (on se rappellera que S est immobile dans $\mathfrak{R}$).
Les données sont : α, M, L, l’intensité de la pesanteur g et Ωo.

2.1 Donner l’expression générale, écrite sous forme d’un produit vectoriel, de la force d’inertie de Coriolis, en précisant la signification physique des termes de cette expression. Que vaut-elle ici ?

2.2 Donner, dans la base $(\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$, les expressions des accélérations $\vec{a}_1$ ($M_1/\mathfrak{R}t$) de M_1 dans $\mathfrak{R}t$ et $\vec{a}_2$ ($M_2/\mathfrak{R}t$) de M_2 dans $\mathfrak{R}t$.

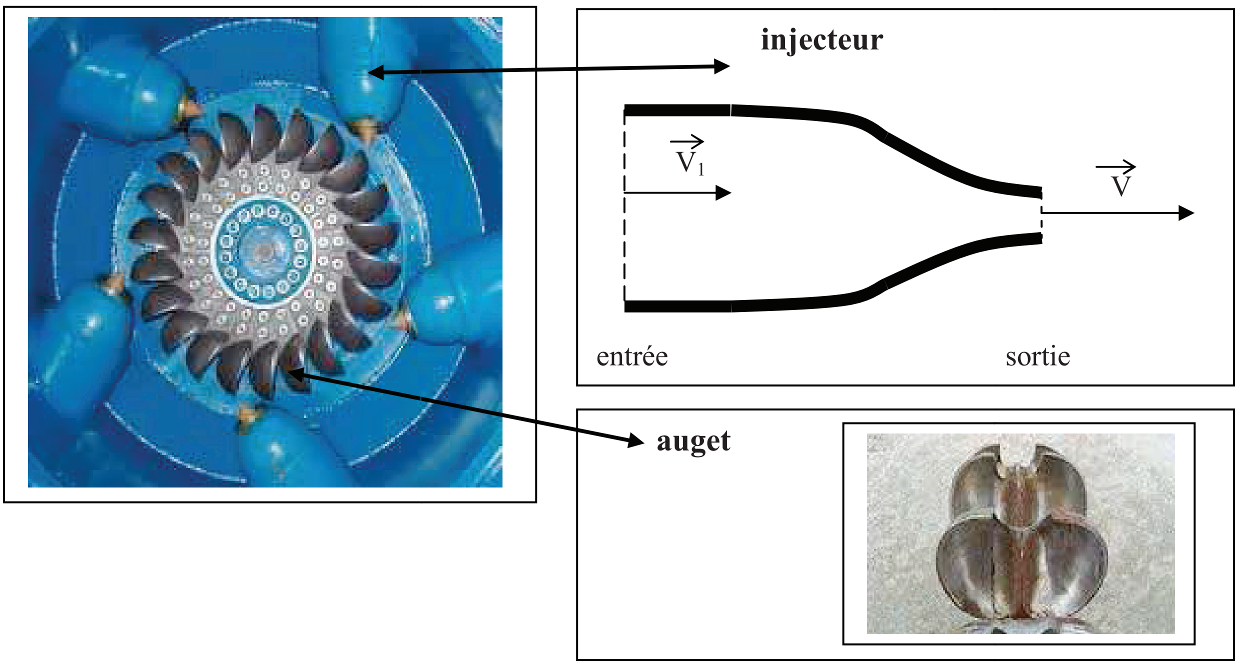
2.3 Donner l’expression des forces d’inertie d’entraînement $\vec{F}_{i1}$ et $\vec{F}_{i2}$ agissant sur M_1 et M_2. Quel nom usuel donne-t-on à ces forces ? Représenter ces forces sur un schéma.

2.4 Déterminer la somme $\vec{\Gamma}_i$ des moments calculés en G des forces $\vec{F}_{i1}$ et $\vec{F}_{i2}$.

2.5 Si l’haltère était libre (c’est-à-dire, si α pouvait varier), décrire sans aucun calcul son mouvement sous la seule action de $\vec{F}_{i1}$ et $\vec{F}_{i2}$.
En déduire l’action $\vec{\Gamma}_G$ que l’organe doit exercer pour maintenir l’haltère fixe dans $\mathfrak{R}$.

Exercice 3 (toutes les questions sont indépendantes).

Une turbine Pelton est formée de récipients appelés augets fixés sur une roue. L’impact, sur ces augets, des jets d’eau émis par les injecteurs met la roue en rotation.



3.1 Par une étude théorique sur un modèle optimisé de turbine en régime permanent, on obtient la puissance P_e transmise à la turbine par les forces exercées par les jets :

$$P_e = K\rho^{\alpha}S^{\beta}V^{\gamma}R\Omega\left[1-\frac{\Omega R}{V}\right].$$

K est un coefficient adimensionnel lié à la géométrie de l'ensemble {auget-jet} ;
ρ est la masse volumique de l'eau, considérée comme un liquide incompressible ;
S est l'aire de la section droite du jet ;
V est la vitesse avec laquelle le jet sort de l'injecteur ;
Ω est la vitesse de rotation de la turbine ;
R est le rayon utile de la roue sur laquelle sont fixés les augets.

A l'aide d'une analyse dimensionnelle, déterminer α, β et γ.

3.2 Représenter P_e graphiquement en fonction de Ω en précisant le domaine possible pour Ω et la valeur de Ω qui optimise le rendement de la turbine.

3.3 Les injecteurs, débitant des jets à très grande vitesse, sont soumis à des efforts importants que l'on cherche ici à déterminer.

On raisonne sur un injecteur, avec le modèle simplifié suivant.

- C'est un tube convergent à symétrie axiale, de section droite d'entrée S_1. L'axe de symétrie est horizontal.
- Il est rempli d'eau s'écoulant en régime stationnaire non turbulent. L'eau est un fluide incompressible sans viscosité : l'écoulement est parfait, sans perte.
- A la sortie, l'injecteur débite dans l'atmosphère (pression P_a) un jet cylindrique de section droite S à la vitesse V.
- On néglige l'influence de la pesanteur sur la pression dans l'injecteur.

Les données sont : ρ, V, S, S_1, P_a.

Déterminer, en fonction des données, la vitesse moyenne V_1 et la pression P_1 de l'eau dans la section d'entrée de l'injecteur.

3.4 La résultante $\vec{F}_{e\to i}$ des forces pressantes de l'eau sur l'injecteur est la somme d'une composante verticale ($\vec{F}_{e\to i/V}$) et d'une composante horizontale ($\vec{F}_{e\to i/H}$) liée au rétrécissement.

On cherche à expliciter $\vec{F}_{e\to i/H}$ en déterminant la résultante des forces exercées par l'injecteur sur l'eau $\vec{F}_{i\to e/H}$ à l'aide du théorème d'Euler.

3.4-a. Quel est le lien entre $\vec{F}_{e\to i/H}$ et $\vec{F}_{i\to e/H}$?

3.4-b. Ecrire le théorème d'Euler en précisant soigneusement le système choisi.

3.4-c. Déterminer la composante horizontale $\vec{F}_{e\to i/H}$ exercée par l'eau sur l'injecteur (donner le résultat en fonction des données, P_1 et V_1). Préciser le sens de cette force sur un schéma.

3.4-d. Mettre son module sous la forme :

$$F_{e\to i/H} = A[S_1 - S] + B[S_1 - S]^2$$

en explicitant A et B en fonction des données : ρ, V, S_1, Pa.

Fin de l'énoncé

IMPRIMERIE NATIONALE – 16 1359 – D'après documents fournis