CONCOURS NATIONAL D'ADMISSION DANS LES GRANDES ECOLES D'INGENIEURS

(Concours national DEUG)

Epreuve commune aux 3 options (Mathématiques, Physique, Chimie)

MECANIQUE - PARTIE I

Mardi 17 mai : 14 h - 16 h

N.B. : le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Les calculatrices sont interdites

Le sujet comporte trois exercices indépendants.

Exercice 1

- Une piste cylindrique de rayon R est fixe dans le référentiel terrestre galiléen $\mathfrak{R}$t rapporté au repère $\{O, \vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z\}$ (figure 1).
- Un objet ponctuel S, de masse m, glisse **sans frottement** à l'intérieur de cette piste. S est repéré par ses coordonnées polaires (R,θ).
- L'action de la piste, sans frottement, se traduit par une force $\vec{N}$, de module N, normale à la piste.
- **On raisonne dans le référentiel $\mathfrak{R}$t, mais tous les vecteurs seront exprimés dans la base cylindrique, unitaire orthonormée directe : Bc = ($\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_y$).**

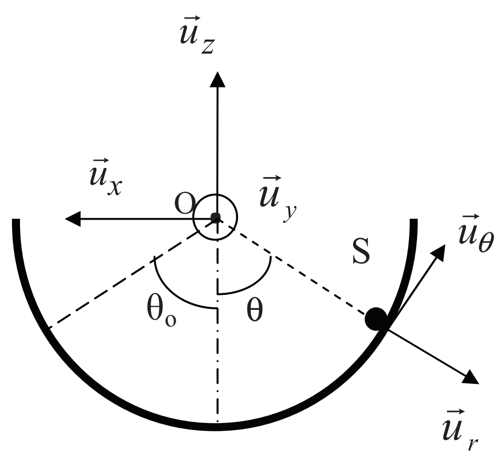

Figure 1

- A la date t = 0, S est sur la piste en $\theta_o < 0$ ($\theta_o = -\pi/3$ par exemple) et est lâché sans vitesse.
- **Les données sont** : m, R, θ_o et l'intensité de la pesanteur g.

1.1 Exprimer, dans la base Bc, la vitesse $\vec{V}$ et l'accélération $\vec{a}$ de S.

1.2 Par application du théorème de la résultante dynamique, trouver deux relations liant les données, N, θ et ses dérivées temporelles.

1.3 Déterminer, en fonction de θ et des données, l'énergie potentielle de pesanteur E_p (on posera $E_p = 0$ lorsque $\theta = \pi/2$).

1.4 Exprimer l'énergie mécanique E_m de S et son énergie mécanique initiale E_{mo}.

1.5 Enoncer précisément le théorème de l'énergie cinétique et le théorème de l'énergie mécanique (on distinguera les actions conservatives et non conservatives).

1.6 Donner une relation liant V^2, les données et θ.

1.7 Déterminer l'expression de N en fonction de θ et des données.

Exercice 2

On reprend le dispositif de la figure 1 (page 1), avec les mêmes conditions initiales, mais maintenant le glissement se fait **avec des frottements** pour lesquels on adopte le modèle suivant :

L'action du cylindre sur S se traduit par :

- une force $\vec{N}$ normale à la piste,
- une force de frottement tangentielle, $\vec{T}$, **de module T considéré constant** et de sens opposé à la vitesse.

Tous les vecteurs seront exprimés dans la base Bc.

- **Les données sont** : m, R, θ_o et l'intensité de la pesanteur g.

2.1 Déterminer, lors du trajet aller de θ_o à θ :

2.1-a. le travail de $\vec{N}$: $W(\vec{N})$,

2.1-b. le travail de $\vec{T}$: $W(\vec{T})$,

2.1-c. le travail du poids $\vec{P}$: $W(\vec{P})$.

2.2

2.2-a. A partir d'un théorème relatif à l'énergie à préciser, écrire une relation donnant V^2 en fonction des données, de θ et du module T.

2.2-b. L'objet ponctuel S, lâché sans vitesse de $\theta_o < 0$, remonte de l'autre coté jusqu'en $\theta_1 > 0$ ($\theta_1 = \pi/4$ par exemple) avant de rebrousser chemin.
Déduire de la question précédente **l'expression littérale** de T en fonction des données et de θ_1.

2.3 Déterminer, lorsque S passe par $\theta = 0$ pour la première fois, la vitesse $V(\theta = 0)$ et sa dérivée temporelle $\frac{dV}{dt}(\theta = 0)$ en fonction de T et des données.

Exercice 3

Un manège est formé d'un plateau (S) lié en O_1 à une barre OO_1 (figure 2).

On définit les référentiels suivants :

- Le référentiel terrestre $\mathfrak{R}$ galiléen rapporté au repère $\left\{O, \vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z\right\}$.
- Le référentiel $\mathfrak{R}$b, lié rigidement à la barre OO_1, rapporté au repère orthonormé direct $\left\{O, \vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_x\right\}$; ce référentiel se déduit de $\mathfrak{R}$ par une rotation d'angle θ autour de l'axe (O, $\vec{u}_x$).

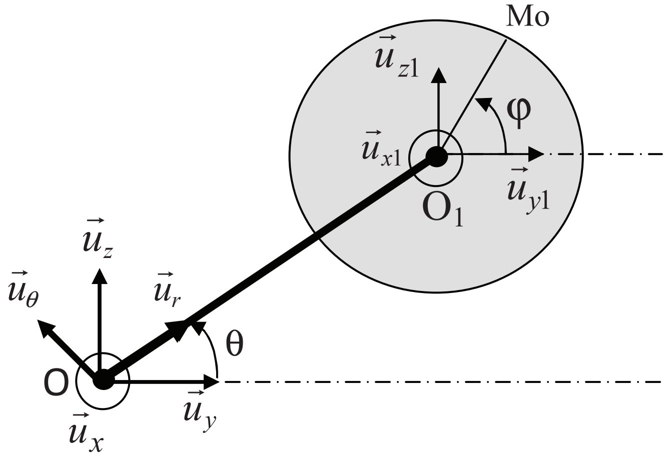

Figure 2

- Le référentiel $R^*_{0_1}$, lié à O_1, rapporté au repère orthonormé direct $\{O_1, \vec{u}_{x1}, \vec{u}_{y1}, \vec{u}_{z1}\}$ tel que, à chaque instant : $\vec{u}_{x1} = \vec{u}_x$; $\vec{u}_{y1} = \vec{u}_y$; $\vec{u}_{z1} = \vec{u}_z$.

Le plateau (S) est un disque homogène, de centre O_1 et de rayon R.
Il peut tourner librement autour de l'axe (O_1, $\vec{u}_{x1}$). L'angle de rotation est φ.

Mo est un point de la périphérie du plateau. Le trait O_1Mo, tracé sur le plateau, permet de repérer l'angle de rotation φ par rapport à (O_1, $\vec{u}_{y1}$).

La barre rigide OO_1 a une longueur L (L > R) et une masse négligeable. Elle peut tourner librement autour de l'axe (O, $\vec{u}_x$) ; l'angle de rotation est θ.

A la date t = 0, θ = 0 et φ = 0.

3.1 Comment appelle-t-on $R^*_{0_1}$? Décrire qualitativement son mouvement dans $\mathfrak{R}$.

3.2 Déterminer les composantes, dans la base $\{\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_x\}$, de la vitesse $\left(\vec{V}_{O_1/\mathfrak{R}}\right)$ et de l'accélération $\left(\vec{a}_{O_1/\mathfrak{R}}\right)$ de O_1 dans $\mathfrak{R}$.

3.3 Déterminer les composantes, dans la base $\{\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z\}$, du vecteur rotation $\vec{\Omega}$ de S dans $R^*_{0_1}$ et de la vitesse $\vec{V}_{\mathrm{Mo}/Ro^*_1}$ de Mo dans $R^*_{0_1}$.

3.4 A l'aide de la loi de composition des vitesses, déterminer les composantes, dans la base $\left\{\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z\right\}$, de la vitesse $\vec{V}_{\mathrm{Mo}/\mathfrak{R}}$ de Mo dans $\mathfrak{R}$.

3.5

3.5-a. Un organe (non représenté sur la figure 2) agit sur S pour imposer, à chaque instant, la relation angulaire suivante : $\varphi = \dfrac{L}{R}\theta$.

Trouver les positions angulaires θ pour que la vitesse $\vec{V}_{Mo/\mathfrak{R}}$ du point Mo dans $\mathfrak{R}$ soit nulle (on fera intervenir un entier n pour expliciter toutes les solutions possibles).

3.5-b. Dans le cas particulier où $\dfrac{L}{R} = 3$, déterminer les deux plus faibles valeurs positives de θ (θ_1 et θ_2) telles que $\vec{V}_{Mo/\mathfrak{R}}$ soit nulle.

En déduire les valeurs φ_1 et φ_2 correspondantes.

3.5-c. Pour chaque cas de 3.5-b, représenter sur un schéma : la tige, le plateau S et Mo.

3.5-d. Le plateau (S), homogène, de masse M, possède un moment d'inertie I_1 par rapport à l'axe $(O_1, \vec{u}_{x1})$. A partir d'un théorème de Koenig, déterminer les composantes, dans la base $\{\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z\}$, du moment cinétique $\vec{L}_O$ de (S), calculé au point O dans $\mathfrak{R}$. On donnera le résultat littéral en fonction de M, L, R, I_1 et $\dot{\theta}$.

Fin de l'énoncé

IMPRIMERIE NATIONALE – 16 1358 – D'après documents fournis