CONCOURS NATIONAL D'ADMISSION DANS LES GRANDES ECOLES D'INGENIEURS

(Concours national DEUG)

Epreuve commune aux 3 options (Mathématiques, Physique, Chimie)

MECANIQUE - PARTIE I

Durée : 2 heures

N.B. : le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Les calculatrices sont interdites

Exercice 1

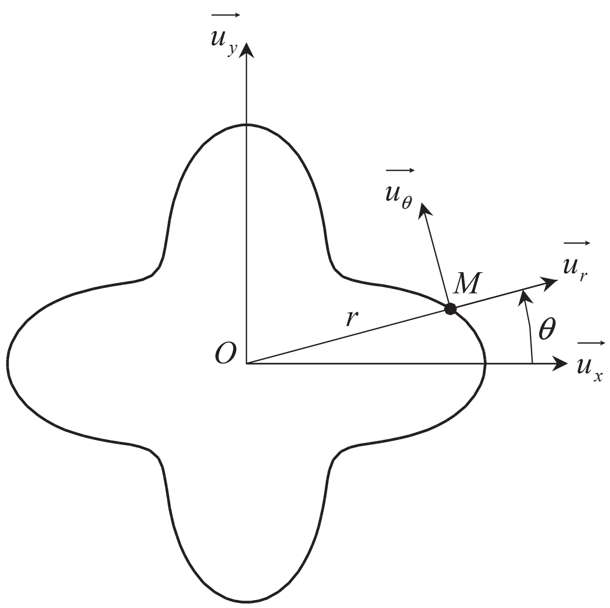

Figure 1

On considère un galet, assimilé à un point matériel M, se déplaçant suivant un support dont la forme peut être décrite par l'équation $r = a - b\cos(n\theta)$ où a, b et n sont des constantes telles que $a > b$ et n est un entier (figure 1).

On repère la position du galet M par ses coordonnées polaires ($r(t)$, $\theta(t)$). Le bras $[OM]$ tourne autour du point O à la vitesse angulaire $\dot{\theta}=\omega_0$ constante.

1.1 Exprimer la vitesse $\vec{v}$ du galet M en fonction de a, b, n, ω_0 et θ dans la base polaire $(\overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_\theta})$.

1.2 Exprimer l'accélération $\vec{a}$ du galet M en fonction de a, b, n, ω_0 et θ dans la base polaire $(\overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_\theta})$.

Exercice 2

On considère un satellite artificiel *S*, représenté par une masse ponctuelle m, en mouvement quelconque autour de la Terre *T* et uniquement soumis à l'attraction terrestre. Le mouvement de *S* est plan : sa position sera repérée par ses coordonnées polaires (r,θ) et on exprimera tous les vecteurs dans la base polaire $(\overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_\theta})$.

On notera G la constante de gravitation universelle, M_T la masse de la Terre, R_T le rayon de la Terre et r la distance du satellite au centre de la Terre.

2.1 Donner l'expression de la force de gravitation $\vec{F}$ agissant sur le satellite *S* en fonction de G, M_T, m et r.

2.2 Exprimer l'énergie mécanique E_m du satellite en fonction de G, M_T, m, r et v la vitesse du satellite *S*.

2.3 En fonction du signe de E_m, discuter de la nature de la trajectoire du satellite *S*.

Dans le cas où $E_m \geq 0$, le satellite *S* s'éloigne indéfiniment de la Terre en se libérant de l'attraction terrestre.

2.4 Déterminer l'expression de la vitesse minimale v_L, appelée vitesse de libération, qu'il faut communiquer au satellite *S* à la surface de la Terre pour obtenir cet éloignement en fonction de G, M_T et R_T.

On s'intéresse maintenant au cas où le satellite *S* est en orbite circulaire de rayon R autour de la Terre (figure 2).

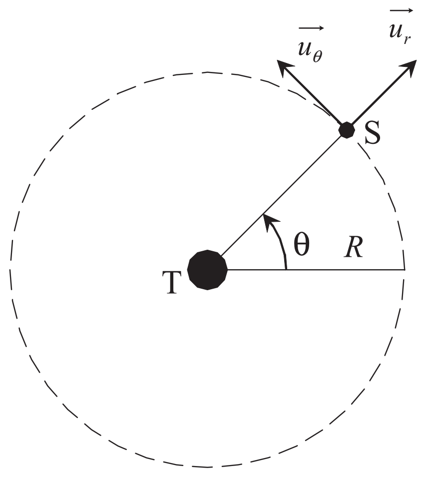

Figure 2

2.5 Rappeler l'expression générale de l'accélération $\vec{a}$ en coordonnées polaires en fonction de R, v et de l'accélération angulaire $\ddot{\theta}$.

2.6 En appliquant la relation fondamentale de la dynamique au satellite, déterminer l'expression de sa vitesse v en fonction de G, M_T et R.

2.7 En déduire l'énergie mécanique E_m du satellite en fonction de son énergie cinétique E_c. Conclure sur la nature de la trajectoire.

Exercice 3

Un pendule est constitué d'un fil inextensible de longueur $OM = \ell$, de masse négligeable et d'une masse ponctuelle m fixée à son extrémité *M*. Le pendule, mobile dans le plan vertical xOy, tourne sans frottement autour de son point fixe *O*. La position du pendule est repérée par l'angle φ que fait la direction du fil avec l'axe horizontal Ox (figure 3).

Le référentiel terrestre $\Re$ est supposé galiléen et rapporté au repère $(O, \overrightarrow{u_x}, \overrightarrow{u_y}, \overrightarrow{u_z})$. On suppose le champ de pesanteur $\vec{g} = g\overrightarrow{u_y}$ uniforme.

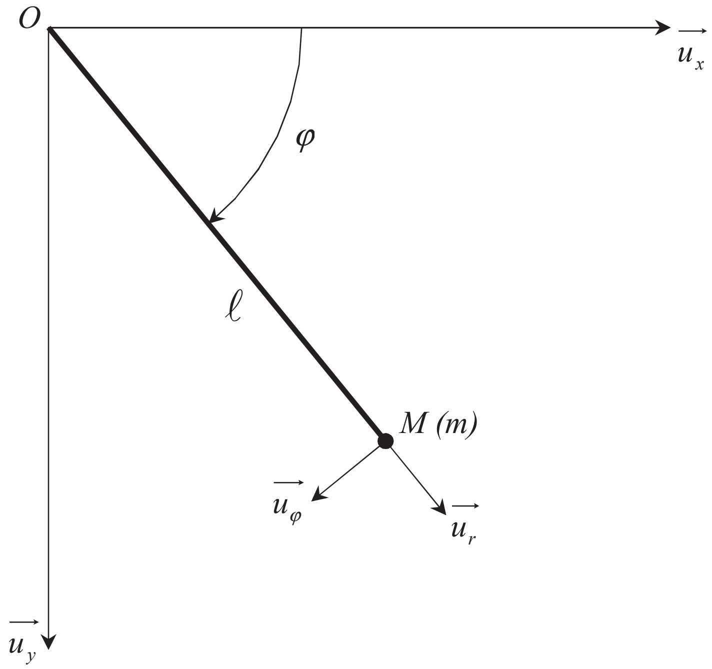

Figure 3

A l'instant initial, on abandonne le pendule sans vitesse initiale à $\varphi = 0$.

On travaillera dans cette partie dans la base cylindrique $(\overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_\varphi}, \overrightarrow{u_z})$.

3.1 Réaliser le bilan des forces extérieures s'exerçant sur la masse ponctuelle.

3.2 Déterminer le moment au point *O* de chacune de ces forces.

3.3 Exprimer le moment cinétique $\overrightarrow{\sigma_O}$ de la masse ponctuelle au point *O*.

3.4 Appliquer à la masse ponctuelle le théorème du moment dynamique au point *O*. En déduire l'équation du mouvement de la masse ponctuelle.

3.5 Donner l'expression de l'énergie mécanique E_m de la masse ponctuelle en fonction de m, ℓ et φ. On prendra l'origine de l'énergie potentielle pour $\varphi = 0$.

3.6 En déduire la vitesse $\vec{v}$ de la masse ponctuelle en fonction de g, ℓ et φ.

Au premier passage par $\varphi = \dfrac{\pi}{2}$, la masse ponctuelle quitte l'extrémité du fil ; cet instant sera considéré comme instant initial $t = 0$ pour la suite de l'exercice.
On travaillera dans cette partie dans la base cartésienne $(\overrightarrow{u_x}, \overrightarrow{u_y}, \overrightarrow{u_z})$.

3.7 Etablir les équations paramétriques $x(t)$ et $y(t)$ de la trajectoire de la masse ponctuelle libre.

3.8 Déterminer l'abscisse x_0 du point d'impact de la masse ponctuelle sur le sol de côte $y_0 = 5\ell$.

3.9 Déterminer l'expression de la vitesse $\vec{v}$ de la masse ponctuelle lors de l'impact sur le sol en fonction de g et ℓ.

Fin de l'énoncé

IMPRIMERIE NATIONALE – 15 1386 – D'après documents fournis