CONCOURS NATIONAL D'ADMISSION DANS LES GRANDES ECOLES D'INGENIEURS

(Concours national DEUG)

Epreuve commune à 2 options (Mathématiques et Physique)

PHYSIQUE - PARTIE II

Durée : 2 heures

N.B. : Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Les calculatrices sont autorisées

L'usage de tout ouvrage de référence et de tout document est interdit.

De très nombreuses parties sont indépendantes. Il est conseillé aux candidats de prendre connaissance rapidement de la totalité du texte du sujet.

Les candidats doivent respecter les notations de l'énoncé et préciser, dans chaque cas, la numérotation de la question posée.

Etude de quelques phénomènes de transport

Partie A
Transport de charges électriques

Un conducteur métallique cylindrique, d'axe $x'x$, dont les charges mobiles sont des électrons, de charge $q = -e$ et animés d'une vitesse d'ensemble (ou vitesse moyenne) $\vec{v}(t)$, est soumis à l'action d'un champ électrique uniforme constant $\vec{E}$, colinéaire et de même sens que le vecteur unitaire $\vec{e}_x$. Ce champ électrique est appliqué à partir de l'instant initial $t = 0$. Par ailleurs, les électrons subissent l'action d'une force de frottement de type fluide (modèle visqueux) $\vec{f} = -\dfrac{m}{\tau}\vec{v}(t)$, avec τ constante physique positive et m la masse de l'électron. Les forces de pesanteur sont négligées.

1. Les porteurs de charge atteignent, en régime permanent, une vitesse moyenne limite.

a) Rechercher l'unité ou la dimension de la constante τ.

b) En appliquant, à l'électron, le principe fondamental de la dynamique $m\dfrac{d\vec{v}(t)}{dt} = \sum \vec{f}_{i,ext}$ (ou seconde loi de Newton), établir une équation différentielle qui relie la vitesse $\vec{v}(t)$ au temps t.

c) La vitesse étant colinéaire au vecteur unitaire $\vec{e}_x$, établir l'expression de la vitesse algébrique v en fonction du temps t, sachant que dans ce mouvement, à l'instant initial, $v(t = 0)$ est nulle.

d) Montrer que $v(t)$ tend vers une valeur limite v_{lim}. En régime permanent, le vecteur vitesse s'écrit donc $\vec{v}$ $(= \vec{v}_{lim}) = \mu\,\vec{E}$: exprimer μ, mobilité des porteurs de charge, en fonction des grandeurs m, e et τ.

e) Tracer l'allure de la courbe représentative de la fonction $v(t)$.

f) Application numérique : $e = 1{,}6 \times 10^{-19}$ C ; $m = 9{,}1 \times 10^{-31}$ kg ; $\tau = 3{,}0 \times 10^{-14}$ U.S.I. ; $E = 1{,}0 \times 10^{-1}$ V m^{-1}.

– Calculer v_{lim}.
– Calculer le temps au bout duquel v atteint la valeur 0,99 v_{lim}. Commenter ce résultat.

2. Les électrons possèdent la vitesse d'ensemble v_{lim} (régime permanent). $\vec{j}$, vecteur densité de courant électrique, est un vecteur de direction donnée par la vitesse moyenne des porteurs de charge et de norme la valeur absolue de la charge électrique traversant une surface unité, perpendiculaire à $\vec{v}$, par unité de temps. N^* est le nombre d'électrons mobiles par unité de volume, valeur uniforme dans le conducteur.

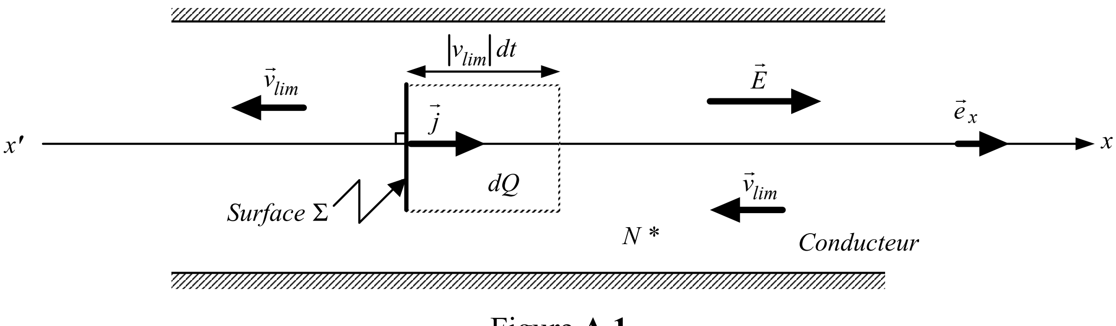

Figure **A.1**

a) Exprimer la charge électrique élémentaire $|dQ|$ qui traverse, pendant la durée dt, la surface plane Σ orthogonale au vecteur $\vec{v}_{lim}$ (figure **A.1**, page 2).

b) En déduire, en fonction de N^*, $|v_{lim}|$ et e, l'expression de la norme $\|\vec{j}\|$ du vecteur densité de courant.

c) Montrer que cette conduction électrique satisfait à la loi d'Ohm locale (ou microscopique) $\vec{j} = \sigma \vec{E}$, expression dans laquelle σ est la conductivité électrique du milieu. Exprimer la conductivité σ en fonction des grandeurs N^*, e, m et τ.

d) Application numérique : $e = 1,6 \times 10^{-19}$ C ; $m = 9,1 \times 10^{-31}$ kg ;
$\tau = 3,0 \times 10^{-14}$ U.S.I. ; $N^* = 8,5 \times 10^{28}$ électrons m^{-3}.

Calculer la conductivité σ du métal.

3. Un fil cylindrique métallique homogène **AB**, de section droite d'aire S constante et de longueur L, soumis à une tension $u = V_A - V_B$ positive, est parcouru par le courant d'intensité I en régime permanent (figure **A.2**).

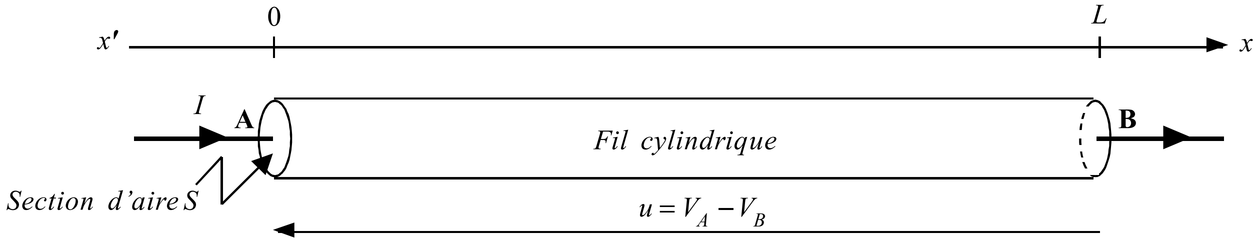

Figure **A.2**

a) Rappeler la relation entre le champ électrique $\vec{E}(M)$ et le potentiel $V(M)$. Ecrire cette expression dans le cadre d'une situation unidimensionnelle (variable x).

b) Sachant que l'intensité I représente le flux de $\vec{j} = \sigma \vec{E}$ à travers la section d'aire S, exprimer le gradient $\dfrac{dV(x)}{dx}$ en fonction de I, σ et S.

c) En déduire l'expression de la résistance électrique $R_{él}$ du fil **AB** (définie par la loi d'Ohm macroscopique $V_A - V_B = R_{él} I$), en fonction de σ, L et S.

Partie B
Conduction thermique

Un barreau cylindrique, noté ($\mathcal{B}$), homogène, d'axe $x'x$, de masse volumique ρ, de longueur L et de section d'aire S, présente une conductivité thermique λ constante. Sa paroi latérale est parfaitement calorifugée par un isolant de capacité thermique négligeable. Les extrémités de ($\mathcal{B}$) sont maintenues, grâce à deux sources, à des températures T_1 ($x = 0$) et T_2 ($x = L$) constantes. Le matériau est le siège d'une conduction thermique (ou diffusion de chaleur) unidimensionnelle (variable x) et unidirectionnelle (transport axial d'énergie, parallèlement au vecteur $\vec{e}_x$). Le régime est permanent et stationnaire : la température T à l'intérieur du barreau ne dépend que de l'abscisse x. Soit $\Phi_{th} = \iint_S \vec{j}_{th} \cdot \overrightarrow{dS}$, le flux (ou puissance) thermique (unité : W) qui traverse une section d'aire S. Le vecteur associé à ce flux est le vecteur densité de courant thermique $\vec{j}_{th}$, lié à la température T par la loi de Fourier qui s'écrit ici :

$$\vec{j}_{th}(x) = -\lambda \frac{dT(x)}{dx} \vec{e}_x = j_{th}(x)\, \vec{e}_x .$$

<u>Rappel d'un outil mathématique</u> : $f(x+dx) - f(x) = \left(\dfrac{df(x)}{dx}\right) dx$.

1. Les températures des sections terminales sont différentes : T_1 ($x = 0$) > T_2 ($x = L$). Aucune énergie thermique n'est créée dans le matériau (absence de réaction nucléaire, absence d'effet Joule, etc.).

a) Rappeler le sens de la diffusion thermique à l'intérieur du barreau.

b) Sans terme de création, le flux thermique Φ se conserve de section en section. Proposer un bilan de puissance thermique (entrée et sortie), en raisonnant sur une tranche élémentaire de matériau d'épaisseur dx, comprise entre les abscisses x et $x+dx$ (figure **B.1**).

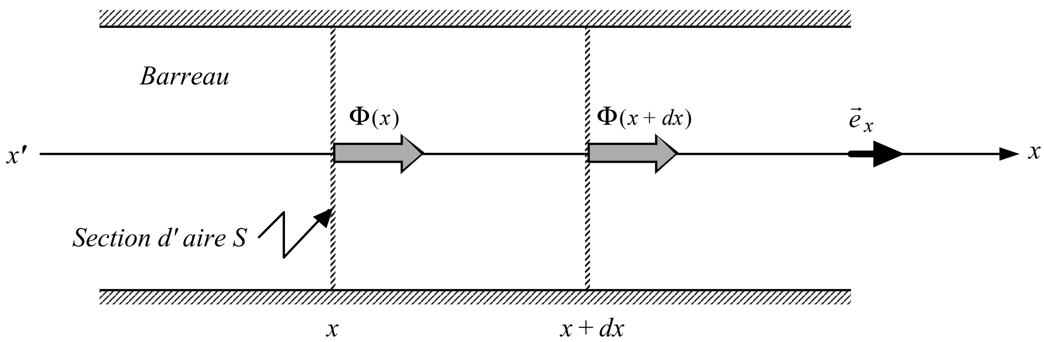

Figure **B.1**

c) En déduire l'équation différentielle (du second ordre) vérifiée par $T(x)$.

d) Etablir la fonction de distribution $T(x)$ des températures à l'intérieur du barreau.

e) Tracer l'allure de la courbe représentative de la fonction $T(x)$, pour $0 \leq x \leq L$.

f) Par analogie avec la loi d'Ohm $V_A - V_B = R_{él}\, I$, la résistance thermique R_{th} peut être définie par $T_1 - T_2 = R_{th}\, \Phi$. Exprimer R_{th} en fonction des données de l'énoncé.

2. Le barreau contient maintenant une substance radioactive qui libère, uniformément dans tout le matériau conducteur, une puissance thermique volumique p_v (unité : W m^{-3}). Le régime est permanent et stationnaire.

a) Exprimer la puissance thermique dP, engendrée par radioactivité dans la tranche élémentaire d'épaisseur dx, en fonction des grandeurs p_v, S et dx.

b) Effectuer, sur cette tranche élémentaire, un bilan de puissance thermique (entrée, création et sortie) (figure **B.2**).

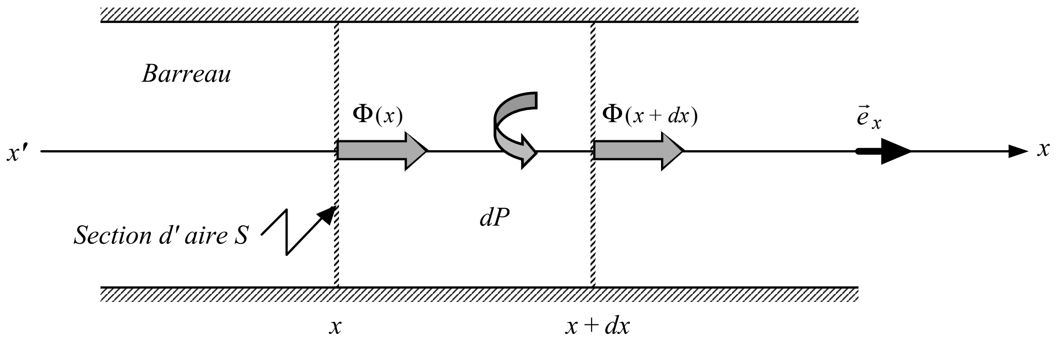

Figure **B.2**

c) En déduire l'équation différentielle (du second ordre) vérifiée par $T(x)$.

d) Etablir la fonction de distribution $T(x)$ des températures à l'intérieur du barreau.

e) Les températures des sections terminales sont maintenues identiques : $T_1 = T_2 = T_o$.

e.1 Déterminer la valeur x_m de x pour laquelle $T(x_m) = T_m$ est maximale.

e.2 Tracer l'allure de la courbe représentative de la fonction $T(x)$, pour $0 \leq x \leq L$.

e.3 Préciser le(s) sens de la diffusion thermique à l'intérieur du barreau.

e.4 Application numérique : $L = 2{,}00$ m ; $\lambda = 2{,}50$ W m^{-1} K^{-1} ;
$p_v = 5{,}00 \times 10^1$ W m^{-3} ; $T_o = 300$ K.

Calculer la température T_m.

3. L'élément radioactif responsable de la création de chaleur dans le barreau est l'uranium (^{235}U), de masse molaire $M(U)$ et de titre massique (ou pourcentage massique) w dans le matériau. Ce radioisotope libère, à l'intérieur de ($\mathcal{B}$), la quantité de chaleur q à chaque désintégration d'un noyau. La variation dN du nombre total $N(t)$ de noyaux instables dans le barreau, pendant la durée élémentaire dt, s'écrit : $dN = - k\ N(t)\ dt$, avec k constante (positive) de réaction radioactive.

a) Rappeler le signe de l'élément différentiel dN.

b) Ecrire la relation simple qui existe entre l'activité radioactive $A(t)$ (nombre total, positif, de désintégrations par seconde) du barreau et la dérivée dN/dt.

c) En déduire l'expression de $A(t)$ en fonction de k et $N(t)$.

d) Déterminer le nombre N_v d'atomes d'uranium présents dans l'unité de volume (1 m^3) de matière dont est constitué le barreau, en fonction de w, ρ, $M(U)$ et N_A (nombre d'Avogadro).

e) Ecrire l'expression qui lie les grandeurs p_v, k, N_v et q.

f) Application numérique : $\rho = 1{,}80 \times 10^4$ kg m^{-3} ; $\lambda = 2{,}50$ W m^{-1} K^{-1} ; $L = 2{,}00$ m ;
$w = 0{,}750$ (= 75 %) ; $M(U) = 2{,}35 \times 10^{-1}$ kg mol^{-1} ;
$k = 3{,}50 \times 10^{-17}$ s^{-1} ; $p_v = 5{,}00 \times 10^1$ W m^{-3} ; $T_o = 300$ K ;
$\mathcal{N}_A = 6{,}02 \times 10^{23}$ mol^{-1}.

Calculer la chaleur q.

Partie C
Diffusion moléculaire à travers une membrane

Deux compartiments (**C**$_1$) et (**C**$_2$), séparés par une membrane verticale poreuse notée (**M**), sont remplis d'une solution aqueuse contenant le même soluté moléculaire [les molécules sont notées (***m***)] mais à des concentrations molaires (unité : mol m^{-3}) différentes c_1 et c_2, avec $c_1 > c_2$ et $\Delta c = (c_1 - c_2)$. Leurs volumes constants sont notés V_1 et V_2 (figure **C.1**). Les molécules (***m***) sont stables et sans action chimique sur le solvant eau. La membrane (**M**), d'épaisseur L, comporte, par unité de surface, N^* (unité : m^{-2}) pores cylindriques d'axe horizontal normal aux deux parois verticales. Chacune de ces deux faces est en contact avec la solution aqueuse sur une surface S.

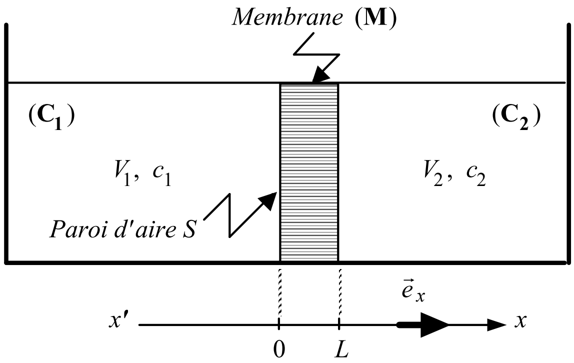

Figure **C.1**

Les pores (ou capillaires) sont supposés identiques. Dans chacun d'eux s'établit un flux macroscopique unidimensionnel (variable x) et unidirectionnel (transport axial, parallèlement au vecteur $\vec{e}_x$) de molécules (***m***). Le régime est permanent : la concentration c de ces molécules à l'intérieur des pores ne dépend que de l'abscisse x.
Ce phénomène de diffusion, à l'intérieur d'un capillaire noté (**p**), est conforme à la loi de Fick, de constante de diffusion (ou diffusivité) D et de vecteur densité molaire de diffusion $\vec{j}_p(x) = j_p(x)\,\vec{e}_x$, lié à $c(x)$ par la relation :

$$\vec{j}_p(x) = -D\left(\frac{dc(x)}{dx}\right)\vec{e}_x = j_p(x)\,\vec{e}_x\,.$$

Aucun courant d'eau ne circule dans les capillaires : le solvant y est supposé sans turbulences. L'influence de la température et des forces de pression est négligée.

1. La diffusion des molécules (***m***) est étudiée à l'intérieur d'un seul pore (**p**), de section droite d'aire s et de longueur L. Dans ce paragraphe, les volumes V_1 et V_2 sont considérés comme infinis : les concentrations c_1 et c_2 des solutions sont supposées constantes et uniformes.

a) Rappeler le sens de la diffusion moléculaire à l'intérieur du capillaire.

b) Conformément à la loi de Fick, la concentration $c(x)$ en molécules (***m***), à l'intérieur du pore, vérifie l'équation différentielle $\left(\dfrac{d^2c(x)}{dx^2}\right) = 0$ (relation qui n'est pas à redémontrer).

Aux limites, cette concentration vaut $c(x) = c_1$ pour $x \le 0$ et $c(x) = c_2$ pour $x \ge L$: établir la fonction de distribution $c(x)$ dans ce capillaire (**p**).

c) En déduire l'expression de j_p, norme de $\vec{j}_p$, vecteur densité molaire de diffusion à travers (**p**), en fonction de D, L et Δc.

d) Tracer l'allure de la courbe représentative de la fonction $c(x)$, pour $0 \le x \le L$.

e) Soit Φ_p (unité : mol s^{-1}), le flux molaire à l'intérieur du capillaire. Par analogie avec la loi d'Ohm $V_A - V_B = R_{él}\, I$, la résistance à la diffusion R_{diff} du pore peut être définie par $c_1 - c_2 = R_{diff}\,\Phi_p$. Exprimer R_{diff} en fonction des données de l'énoncé.

2. Les volumes des compartiments sont maintenant considérés comme finis. Les concentrations dans les compartiments vont donc évoluer au cours du temps. A une date t, les concentrations, maintenues homogènes sur les volumes V_1 et V_2, s'écrivent respectivement $c_1(t)$ et $c_2(t)$. Soit $\Delta c(t) = c_1(t) - c_2(t)$. L'étude du transport des molécules (***m***) d'un compartiment à l'autre, à travers la membrane, nécessite d'envisager <u>l'ensemble</u> des pores de (**M**).

a) Soit $\vec{j}_M = j_M\, \vec{e}_x$ (unité : mol m^{-2} s^{-1}), le vecteur densité molaire de diffusion à travers la membrane. Etablir l'expression de j_M, d'abord en fonction de N^*, j_p et s, puis ensuite en fonction de N^*, D, s, L et $\Delta c = (c_1 - c_2)$.

b) Le vecteur $\vec{j}_M$ se met donc sous la forme $\vec{j}_M = K\, \Delta c\, \vec{e}_x$, avec K, constante homogène à une vitesse d'infiltration. Exprimer la constante K en fonction de N^*, D, s et L.

c) Application numérique : $K = 10^{-4}$ m s^{-1} ; $N^* = 10^{10}$ pores m^{-2} ;
$L = 10^{-5}$ m ; $D = 10^{-9}$ U.S.I.

Calculer l'aire s de la section droite du pore.

d) Déterminer la quantité élémentaire de matière dn (nombre de moles positif) transférée d'un compartiment à l'autre, à travers la membrane de surface S et pendant la durée élémentaire dt, en fonction de K, Δc, S et dt.

e) Exprimer d'une part, $\left(\dfrac{dc_2(t)}{dt}\right) = \dfrac{1}{V_2}\left(\dfrac{dn_2(t)}{dt}\right)$ en fonction de K, S, Δc et V_2 et d'autre part $\left(\dfrac{dc_1(t)}{dt}\right) = \dfrac{1}{V_1}\left(\dfrac{dn_1(t)}{dt}\right)$ en fonction de K, S, Δc et V_1.

f) En posant $\dfrac{1}{\tau} = K\ S\left(\dfrac{1}{V_1} + \dfrac{1}{V_2}\right)$, formuler $\left(\dfrac{d\Delta c(t)}{dt}\right)$ en fonction de Δc et τ.

g) Sachant qu'à $t = 0$, $\Delta c(t=0) = C$ (constante positive), établir l'expression de $\Delta c(t) = f(t)$.

h) Tracer l'allure de la courbe représentative de la fonction $\Delta c(t) = c_1(t) - c_2(t)$.

Fin de l'énoncé.

IMPRIMERIE NATIONALE – 14 1396 – D'après documents fournis