CONCOURS NATIONAL D'ADMISSION DANS LES GRANDES ECOLES D'INGENIEURS

(Concours national DEUG)

Epreuve commune aux 3 options (Mathématiques, Physique, Chimie)

MECANIQUE - PARTIE I

Durée : 2 heures

N.B. : Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Les calculatrices sont interdites

Exercice 1

Un cylindre de rayon R et d'axe $O\vec{z}$ est fixé sur le plan horizontal xOy. On attache à la base du cylindre en un point A de sa périphérie un fil inextensible de longueur totale ℓ_0. L'autre extrémité du fil est attachée à un point matériel M de masse m, qui peut glisser sans frottement sur le plan xOy (figure 1).

Le référentiel terrestre $\Re$ est supposé galiléen et rapporté au repère $(O,\vec{x},\vec{y},\vec{z})$, l'axe $O\vec{z}$ étant dirigé suivant la verticale ascendante. On suppose le champ de pesanteur $\vec{g}=-g\,\vec{z}$ uniforme.

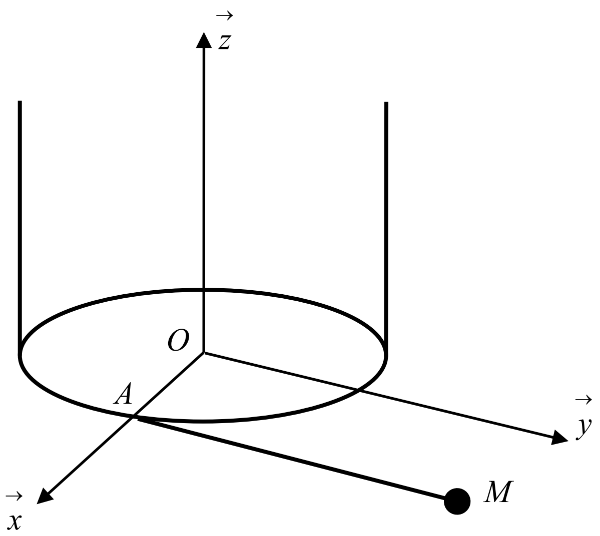

Figure 1

A l'instant initial $t = 0$, le fil AM est parallèle à $O\vec{y}$ et on communique au point M une vitesse $\vec{v_0}$ horizontale et orthogonale au fil (figure 2).
Le fil s'enroule alors autour du cylindre et on suppose qu'il reste tendu au cours du mouvement.
On note $\ell = HM$ la longueur de fil non enroulé à l'instant t, l'arc de cercle AH étant la portion de fil enroulé au même instant (figure 3).

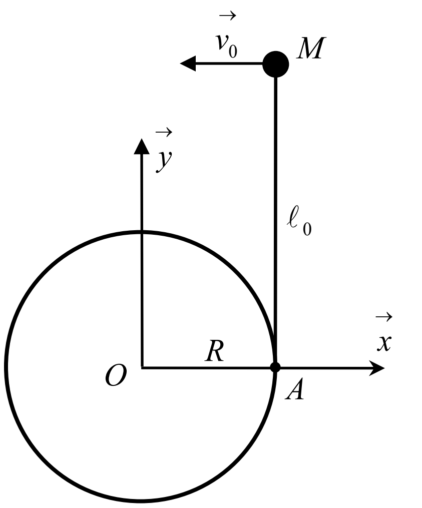

Figure 2 : à $t = 0$

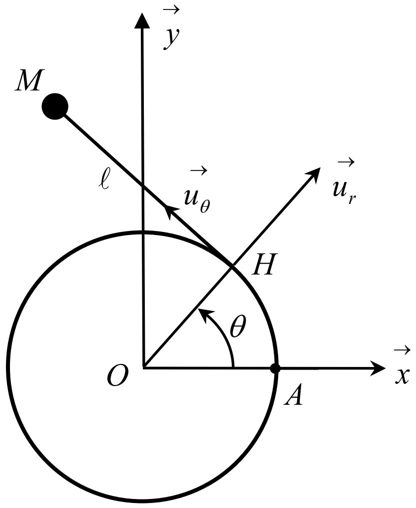

Figure 3 : à $t > 0$

1.1 Déterminer la relation entre ℓ, ℓ_0, R et θ. En déduire une relation entre R, $\dot{\theta}$ et $\dot{\ell}$.

1.2 Exprimer le vecteur position $\vec{OM}$ dans la base polaire $(\vec{u_r}, \vec{u_\theta})$.

1.3 En déduire l'expression du vecteur vitesse $\vec{v}$ du point M à l'instant t dans cette même base, en fonction de $\dot{\theta}$ et ℓ.

1.4 Réaliser le bilan des forces extérieures appliquées au point M.

1.5 Déterminer le travail W_{ext} des forces extérieures appliquées au point M.

1.6 En appliquant le théorème de l'énergie cinétique, montrer que la norme du vecteur vitesse $\vec{v}(t)$ du point M reste constante au cours du mouvement.

1.7 Déterminer ℓ en fonction de ℓ_0, R, v_0 et t.

1.8 Déterminer l'instant final t_f et l'angle θ_f correspondant, pour lequel le fil est entièrement enroulé autour du cylindre.

1.9 Déduire de la question 1.6 l'expression du vecteur accélération $\vec{a}$ du point M à l'instant t dans la base polaire $(\vec{u_r}, \vec{u_\theta})$ en fonction de $\dot{\theta}$ et ℓ.

1.10 En déduire l'expression de la norme T de la tension $\vec{T}$ exercée par le fil sur le point M au cours du mouvement. On la mettra sous la forme $T = \dfrac{T_0}{\sqrt{1-\dfrac{t}{t_f}}}$ où on exprimera T_0 en fonction de m, v_0 et ℓ_0 et t_f en fonction de ℓ_0, R et v_0.

1.11 Que vaut T lorsque t se rapproche de t_f ? Conclure.

Exercice 2

Le référentiel terrestre $\Re$ est considéré comme galiléen ; il est rapporté au repère $(O,\vec{x},\vec{y},\vec{z})$ tel que l'axe $O\vec{z}$ soit vertical ascendant.

Aux extrémités d'une tige A_1A_2 de masse négligeable et de longueur $2d$, on fixe deux sphères, assimilées à deux masses m ponctuelles. Le système S, formé des deux sphères et de la tige, est suspendu au point O, milieu de la tige, à un fil de torsion de raideur k (figure 4).

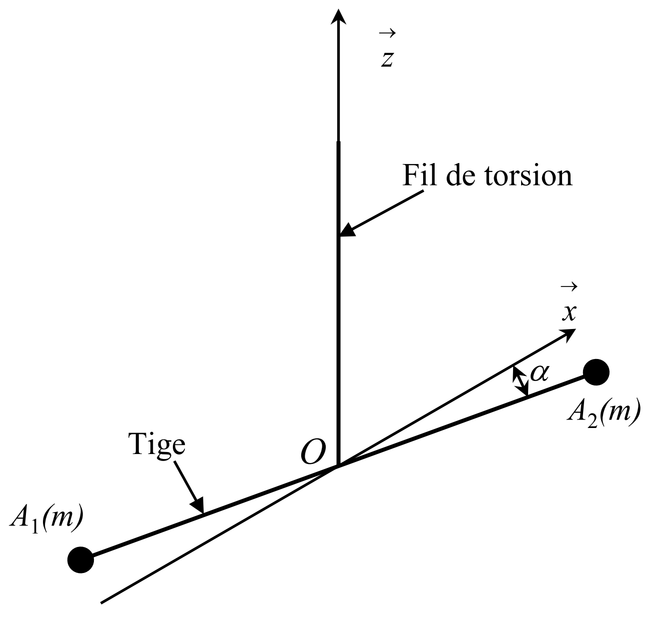

Figure 4

On tourne la tige d'un angle α faible. Le système se met à osciller sans frottement à la période T autour de l'axe $O\vec{z}$.

On note $I = 2md^2$ le moment d'inertie du système S par rapport à l'axe $O\vec{z}$.

2.1 En appliquant le théorème du moment dynamique au système S au point O, établir l'équation différentielle du mouvement.

2.2 En déduire la raideur k du fil de torsion en fonction de m, d et T.

Le système est maintenant au repos. Aux points M_1 et M_2, distants respectivement d'une distance r de A_1 et A_2, on place deux masses M ($M >> m$), voir figure 5. Sous l'effet des interactions de gravitation entre les masses m et M, la tige tourne d'un angle θ très faible mais mesurable.

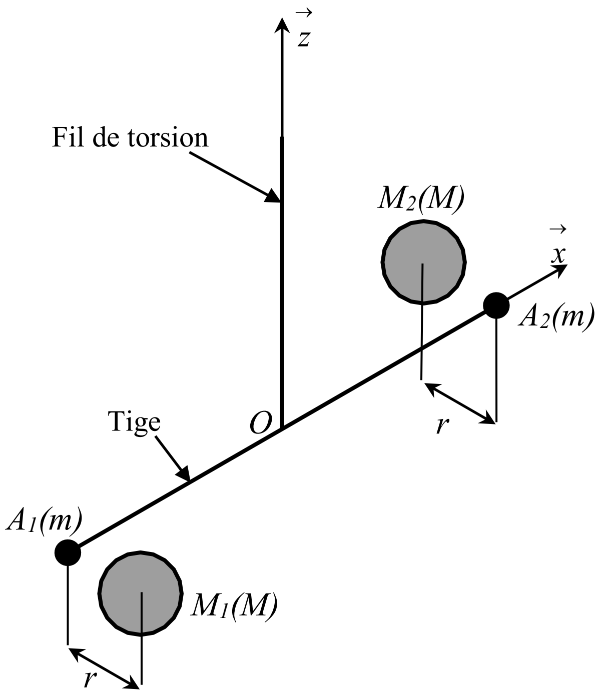

Figure 5

La rotation étant très faible, on considère que la distance r reste constante.
On note G la constante de gravitation universelle.
On néglige l'attraction gravitationnelle exercée par la Terre sur le système.

2.3 Exprimer le couple $\vec{C_g}$ exercé sur le système S au point O par les interactions de gravitation en fonction de m, M, d, r et G.

2.4 En appliquant le théorème du moment dynamique au système S au point O, exprimer la constante de gravitation universelle G en fonction de m, M, d, r et T.

L'attraction gravitationnelle exercée par la Terre sur le système n'est plus négligée et on considère que le point O se situe au niveau de la surface terrestre.

On note $\vec{g} = -g\vec{z}$ l'accélération de la pesanteur à la surface terrestre, M_T la masse de la Terre et R_T le rayon de la Terre.

2.5 Exprimer la masse M_T de la Terre en fonction de m, M, d, r, R_T, k et g.

Fin de l'énoncé

IMPRIMERIE NATIONALE – 14 1399 – D'après documents fournis