CONCOURS NATIONAL D'ADMISSION DANS LES GRANDES ECOLES D'INGENIEURS

(Concours national DEUG)

Epreuve commune aux 3 options (Mathématiques, Physique, Chimie)

MECANIQUE - PARTIE I

Durée : 2 heures

N.B. : Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Les calculatrices sont interdites

Exercice 1

Dans un repère $\Re(O,\vec{u}_x,\vec{u}_y,\vec{u}_z)$, on considère une canalisation horizontale d'axe $O\vec{u}_x$, de rayon R, dans laquelle s'écoule, à la vitesse $\vec{V} = V\vec{u}_x$, un liquide supposé parfait (on néglige la viscosité) et incompressible, de masse volumique ρ. On place dans cette canalisation deux tubes ouverts à l'air libre comme indiqué sur la **figure 1**. Afin de déterminer V, on suppose qu'en tout point d'une section de la conduite, la vitesse est la même.
Les 2 tubes sont positionnés suffisamment éloignés l'un de l'autre et on suppose que les lignes de courant ne sont pas modifiées par la présence des tubes.

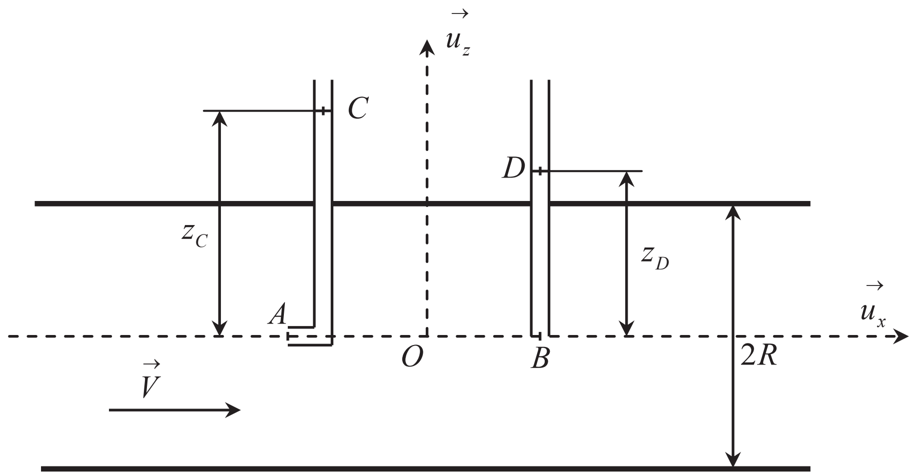

Figure 1

Le liquide pénètre dans les tubes et atteint les points C et D, d'altitude respective z_C et z_D. Dans les tubes, le liquide est au repos. On note $h = (z_C - z_D)$ la dénivellation entre les 2 hauteurs de niveau.
On note P_{at} la pression atmosphérique supposée constante quelle que soit l'altitude et on note $\vec{g} = -g\vec{u}_z$ l'accélération de la pesanteur.

1.1 Exprimer simplement $\vec{V}_A$ et $\vec{V}_B$ les vitesses du liquide aux points d'entrée A et B des deux tubes.
1.2 Déterminer la pression statique P_A du liquide au point A en fonction de P_{at}, ρ, g et z_C.
1.3 Déterminer la pression statique P_B du liquide au point B en fonction de P_{at}, ρ, g et z_D.
1.4 En appliquant le théorème de Bernoulli entre les points A et B, déterminer la vitesse d'écoulement V du liquide en fonction de P_A et P_B.
1.5 En déduire la vitesse d'écoulement V en fonction de g et de la dénivellation h.
1.6 En déduire le débit volumique Q_V en fonction de R, g et h.

Exercice 2

On désire mettre un satellite en orbite autour de la Terre de centre T sur un cercle de rayon r_0. Le satellite est assimilé à une masse ponctuelle m placée au point K.
On note M la masse de la Terre et G la constante de gravitation universelle.
Le système (Terre, Satellite) est considéré comme isolé.

2.1 Déterminer le module v_0 de la vitesse $\vec{v_0}$ du satellite en fonction de G, M et r_0.

Pour donner sa trajectoire circulaire à K, la vitesse $\vec{v_0}$ doit lui être communiquée en un point K_0 de son orbite de transfert, de telle manière que $\vec{v_0}$ soit perpendiculaire à $\vec{TK_0}$ (**figure 2**).

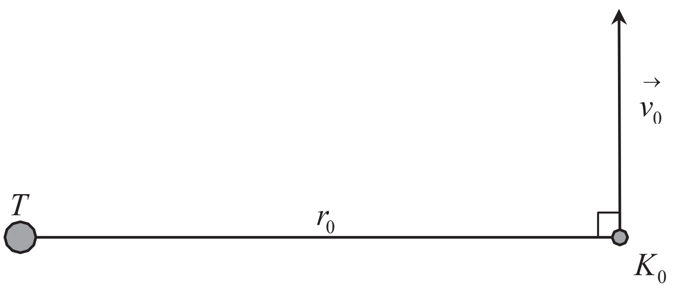

Figure 2

Le changement d'orbite est manqué, la vitesse transmise à K en K_0 a le même module que pour une orbite circulaire mais elle fait un angle α avec la direction prévue (**figure 3**).

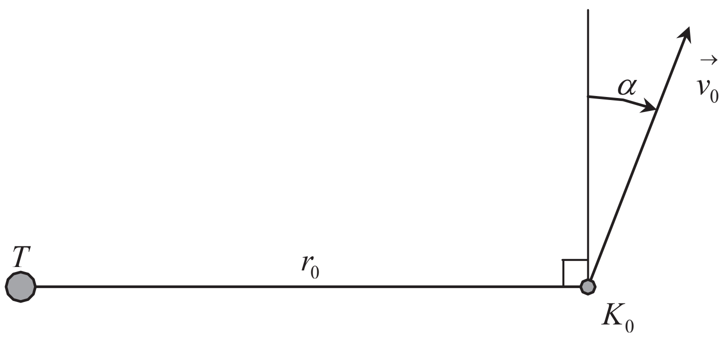

Figure 3

Le satellite se retrouve alors sur une trajectoire elliptique d'équation : $\frac{1}{r} = \frac{1}{p}(1 + e\cos\theta)$

où e désigne l'excentricité de l'ellipse et p le paramètre de l'ellipse,
r est la distance entre T et K,
θ est l'angle entre $\vec{TK_0}$ et $\vec{TK}$.

Soit $\vec{u_r}$ et $\vec{u_\theta}$ les vecteurs de la base polaire en K associés aux coordonnées r et θ.

2.2 Déterminer la constante des aires C en fonction de r_0, v_0 et α.

2.3 Rappeler l'expression des coordonnées polaires de l'accélération a de K en fonction de r et θ.

2.4 Montrer que a ne peut avoir qu'une seule composante, qui peut se mettre sous la forme :

$$a = -\frac{C^2}{r^2}\left[\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\theta^2}\left(\frac{1}{r}\right) + \frac{1}{r}\right].$$

2.5 En déduire l'équation différentielle du mouvement vérifiée par $\frac{1}{r}$.

2.6 En déduire l'excentricité e et le paramètre p de l'ellipse en fonction de r_0, v_0, α, G et M.

2.7 En déduire les distances r_P et r_A du centre T de la Terre au périgée et à l'apogée en fonction de r_0, v_0, α, G et M.

Exercice 3

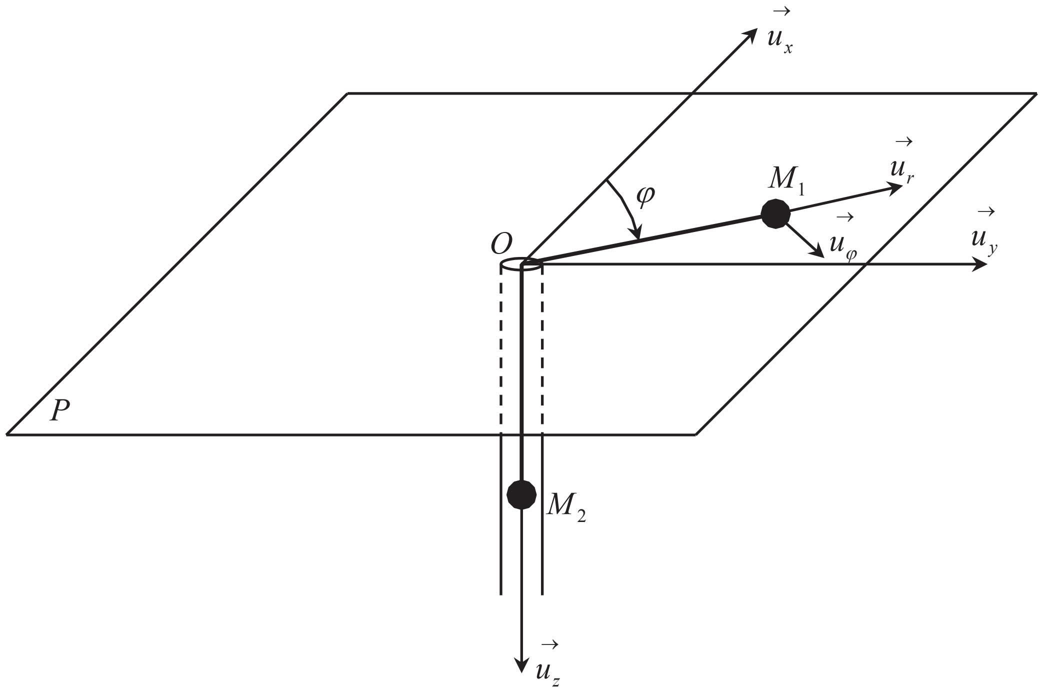

Figure 4

Dans un référentiel galiléen $\Re$, rapporté au repère $(O,\vec{u}_x,\vec{u}_y,\vec{u}_z)$, on considère deux masses ponctuelles M_1 et M_2, de même masse m, reliées par un fil (M_1OM_2) de longueur L, inextensible et de masse négligeable (**figure 4**).
La masse M_1 glisse sans frottement sur un plan horizontal P tandis que la masse M_2 coulisse sans frottement dans un tube vertical.

On note $(\vec{u}_r,\vec{u}_\varphi,\vec{u}_z)$ la base de coordonnées cylindriques et $\vec{g}=-g\vec{u}_z$ l'accélération de la pesanteur.

La position du point M_1 est définie par $\vec{OM}_1=r\vec{u}_r$, l'angle φ est défini entre $\vec{u}_x$ et $\vec{u}_r$ et la position du point M_2 est définie par $\vec{OM}_2=z\vec{u}_z$.

Les conditions initiales sont $r=r_0$ et $\dot{\varphi}=\omega_0$.
Dans tout l'exercice, on exprimera les vecteurs dans la base de coordonnées cylindriques $(\vec{u}_r,\vec{u}_\varphi,\vec{u}_z)$.

3.1 Etablir un bilan des forces extérieures appliquées successivement à M_1 puis M_2.
3.2 Projeter l'équation de la résultante dynamique appliquée à chaque masse M_1 et M_2 dans la base $(\vec{u}_r,\vec{u}_\varphi,\vec{u}_z)$.
3.3 Déterminer le moment cinétique par rapport à O de chaque masse.
3.4 En utilisant le théorème du moment cinétique, déterminer $\dot{\varphi}$ en fonction de r, ω_0 et r_0.

3.5 Déduire de la relation fondamentale de la dynamique appliquée au fil, la relation donnant $\ddot{z}$ en fonction de $\ddot{r}$, r, $\dot{\varphi}$ et g.

3.6 A partir des résultats précédents, montrer que l'équation différentielle à laquelle obéit r s'écrit sous la forme : $2\ddot{r}-\frac{K}{r^3}=-g$. On exprimera K en fonction de ω_0 et r_0.

3.7 On considère maintenant le cas où M_1 décrit un mouvement circulaire uniforme de rayon r_0. Déterminer alors ω_0 en fonction de r_0 et g pour que cela soit possible.

Fin de l'énoncé.

IMPRIMERIE NATIONALE – 13 1347 – D'après documents fournis