CONCOURS NATIONAL D'ADMISSION DANS LES GRANDES ECOLES D'INGENIEURS

(Concours national DEUG)

Epreuve commune à 2 options (Mathématiques et Physique)

PHYSIQUE - PARTIE II

Durée : 2 heures

N.B. : Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Les calculatrices sont autorisées

L'usage de tout ouvrage de référence et de tout document est interdit.

De très nombreuses parties sont indépendantes. Il est conseillé aux candidats de prendre connaissance rapidement de la totalité du texte du sujet.

Les candidats doivent respecter les notations de l'énoncé et préciser, dans chaque cas, la numérotation de la question posée.

ÉLECTROMAGNÉTISME À LA SURFACE D'UN MÉTAL

Partie A

Charges à la surface d'un métal

L'espace est rapporté, en coordonnées cartésiennes, à un repère orthonormé direct (Ox, Oy, Oz) de base ($\vec{e}_x$, $\vec{e}_y$, $\vec{e}_z$).
Le théorème de Gauss, appliqué à l'électrostatique, est rappelé : le flux sortant Φ du champ électrostatique $\vec{E}(M)$ à travers une surface fermée, est égal au rapport de la charge totale intérieure Q_{int} sur la permittivité ε_o : $\Phi = \iint_{Surface\ fermée} \vec{E}(M).\overrightarrow{dS} = \dfrac{Q_{int}}{\varepsilon_o}$.

La relation vectorielle locale, valable en tout point M de l'espace, entre le champ électrostatique $\vec{E}(M)$ et le potentiel électrostatique $V(M)$, est rappelée : $\vec{E}(M) = -\overrightarrow{grad}\ V(M)$.

I. Plan infini chargé dans le vide

Dans le vide, le plan infini yOz, d'équation $x = 0$, porte une répartition surfacique de charge Σ (unité : C m^{-2}), positive, uniforme et constante (figure **A.1**).

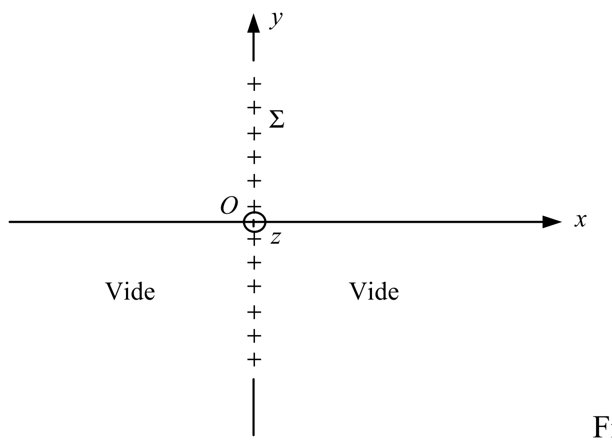

Figure **A.1**

1. Grâce à des considérations de symétrie, déterminer la direction du champ électrostatique $\overrightarrow{E_\Sigma}(M)$, créé par la distribution surfacique de charge Σ, en tout point M de l'espace.
2. Par application du théorème de Gauss (ou de toute autre méthode choisie par le candidat), établir, en fonction de Σ et ε_o, l'expression vectorielle du champ $\overrightarrow{E_\Sigma}(M)$ en tout point M de l'espace.
3. Sachant que le potentiel électrostatique $V(M)$ est connu à une constante près, déterminer l'expression de $V_\Sigma(M)$ créé, en tout point M de l'espace, par la distribution surfacique de charge. Le potentiel $V_\Sigma(x = 0)$ peut être choisi égal à V_o, constante positive.
4. En déduire l'allure des courbes représentatives des fonctions $E_\Sigma(x)$ et $V_\Sigma(x)$, pour tout $x \in \ ]-\infty, +\infty[$.

II. Surface métallique chargée

Un conducteur métallique parfait occupe le demi-espace défini par $x \leq 0$. Le champ électrostatique à l'intérieur du métal est rigoureusement nul. La surface du conducteur, plan infini yOz d'équation $x = 0$, porte une répartition surfacique σ (unité : C m^{-2}), positive, uniforme et constante (figure **A.2**).

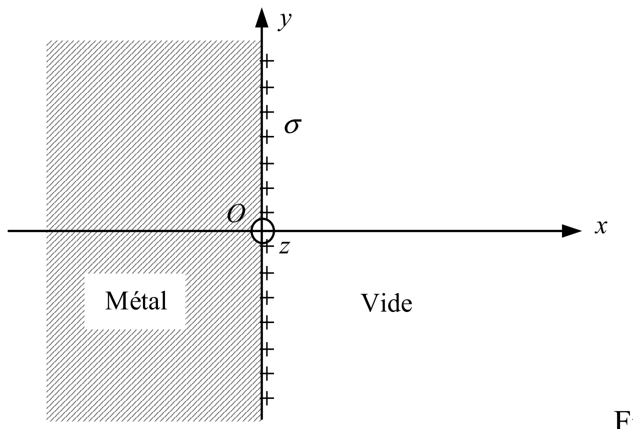

Figure **A.2**

1. Sans démonstration, préciser la direction du champ électrostatique $\overrightarrow{E_\sigma}(M)$ créé par la distribution surfacique de charge σ, en tout point M du demi-espace défini par $x > 0$.
2. Par application du théorème de Gauss (méthode, cette fois, fortement conseillée), établir pour $x > 0$ et en fonction de σ et ε_o, l'expression vectorielle du champ $\overrightarrow{E_\sigma}(M)$.
3. Déterminer l'expression de $V_\sigma(M)$ créé, en tout point de l'espace, par la distribution surfacique de charge. Le potentiel $V_\sigma(x = 0)$ peut être choisi égal à V_o, constante positive.
4. En déduire l'allure des courbes représentatives des fonctions $E_\sigma(x)$ et $V_\sigma(x)$, pour tout $x \in \left]-\infty, +\infty\right[$.

III. Présence d'une charge d'espace supplémentaire

Parallèlement à la surface chargée positivement du métal (le plan d'équation $x = 0$ porte toujours la répartition surfacique σ), la portion d'espace comprise entre les plans d'équation $x = 0$ et $x = \ell$ (avec $\ell > 0$), présente maintenant une répartition volumique de charge ρ (charge d'espace, unité : C m^{-3}), négative, uniforme et constante. La permittivité, dans cette portion d'espace, est supposée égale à ε_o (figure **A.3**).

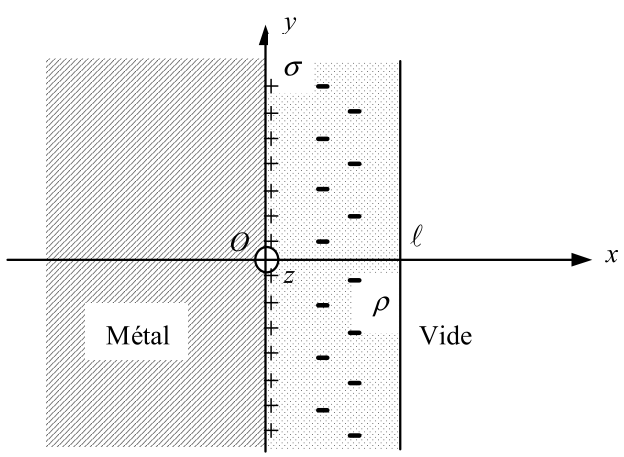

Figure **A.3**

1. Sans démonstration, préciser la direction du champ électrostatique $\overrightarrow{E_{tot}}(M)$ créé par l'ensemble des deux répartitions de charge (surfacique σ et volumique ρ), en tout point M du demi-espace défini par $x > 0$.

Tournez la page S.V.P.

2. Par application du théorème de Gauss (méthode, une nouvelle fois, fortement conseillée), établir, en fonction des données de l'énoncé, l'expression vectorielle du champ $\overrightarrow{E_{tot}}\,(M)$:
   a) en tout point M, extérieur au métal et aux charges, tel que $x > \ell$;
   b) en tout point M, intérieur à la couche uniformément chargée, tel que $0 < x < \ell$.
3. Quelle relation doivent présenter σ et ρ pour que le champ électrostatique résultant $\overrightarrow{E_{tot}}\,(M)$ soit nul dans l'espace défini par $x > \ell$? Pourquoi cette relation est-elle appelée condition d'écrantage ?
4. Tracer, dans le cas $\overrightarrow{E_{tot}}\,(x > \ell) = \vec{0}$, l'allure de la courbe représentative de la fonction $E_{tot}(x)$, pour tout $x \in \left]-\infty, +\infty\right[$.

Partie B

Guide d'ondes

L'espace est rapporté, en coordonnées cartésiennes, à un repère orthonormé direct (Ox, Oy, Oz) de base ($\vec{e}_x$, $\vec{e}_y$, $\vec{e}_z$). Tout point $M(x,y,z)$ est donc caractérisé par le vecteur $\vec{r} = \overrightarrow{OM} = x\,\vec{e}_x + y\,\vec{e}_y + z\,\vec{e}_z$.

Dans l'énoncé, les grandeurs complexes (scalaires ou vectorielles) sont soulignées (avec $j^2 = -1$).

Dans le vide, une onde électromagnétique, plane, progressive, monochromatique, polarisée rectilignement (OPPMR) et harmonique de pulsation ω, se propage à la vitesse c dans le demi-espace défini par $x \geq -\ell$. Cette onde, notée (**O**), caractérisée par le vecteur d'onde $\vec{k} = -\alpha\,\vec{e}_x + \beta\,\vec{e}_y$ (avec α et β, constantes positives) se dirige vers un miroir métallique parfait, plan, noté (**P**), d'équation $x = -\ell$, sous l'angle d'incidence i. Son champ électrique s'écrit, en notation complexe, $\underline{\vec{E}}\,(M,t) = E_o\ e^{j(\omega t - \vec{k}.\vec{r})}\,\vec{e}_z$ (avec $E_o\,\vec{e}_z = \overrightarrow{E_o}$). Cette onde incidente se réfléchit sur le miroir (**P**) en donnant naissance à une onde plane réfléchie, progressive, notée (**O'**), harmonique de même pulsation ω, de vecteur d'onde $\vec{k}'$ et de vecteur champ électrique $\underline{\overrightarrow{E'}}\,(M,t) = \overrightarrow{E'_o}\ e^{j(\omega t - \vec{k}'.\vec{r})}$ (figure **B.1**).

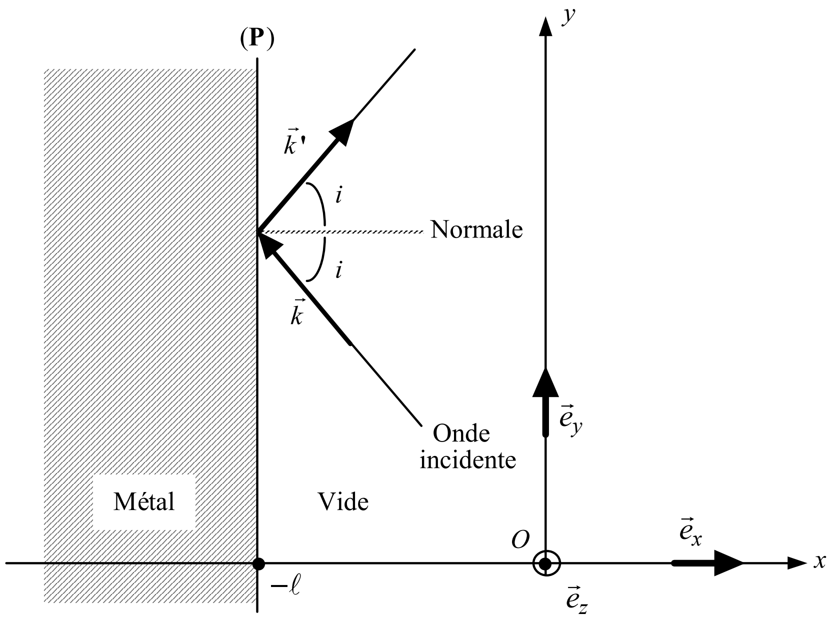

Figure **B.1**

La relation caractéristique des OPPMR, déduite des équations de Maxwell, est rappelée par le produit vectoriel : $\vec{B} = \dfrac{\vec{k} \wedge \vec{E}}{\omega}$.

I. L'onde incidente (O)

1. Rappeler, sans démonstration, la relation, pour l'onde incidente, entre la norme k du vecteur d'onde $\vec{k}$ et les grandeurs ω et c (relation dite de dispersion).
2. Montrer, sans calcul, que la direction de propagation de cette onde (**O**) est parallèle au plan xOy, c'est-à-dire orthogonale à l'axe Oz.
3. Exprimer l'angle d'incidence i (positif), puis la longueur d'onde λ_o de (**O**), en fonction des constantes α et β.
4. Déterminer les trois composantes <u>complexes</u> du vecteur champ magnétique $\underline{\vec{B}}\,(M,t)$ de (**O**).

II. Réflexion, sous incidence oblique, sur la surface métallique parfaitement conductrice

1. La réflexion de l'onde (**O**), sur le plan (**P**) d'équation $x = -\ell$, se produit conformément aux lois de Descartes. Exprimer, en fonction des constantes positives α et β, les composantes k'_x, k'_y et k'_z du vecteur d'onde $\vec{k}'$ de l'onde réfléchie (**O'**).
2. En $x = -\ell$, les conditions de continuité des champs électromagnétiques entraînent, entre autres, la relation $\overrightarrow{E'_o} = -\overrightarrow{E_o}$ (relation qui n'est pas à redémontrer) entre les amplitudes. En déduire les trois composantes <u>complexes</u> du vecteur champ magnétique $\underline{\overrightarrow{B'}}\,(M,t)$ de l'onde réfléchie.

III. Superposition des deux ondes incidente et réfléchie

Dans l'espace défini par $x \geq -\ell$, les deux ondes incidente (**O**) et réfléchie (**O'**) se superposent.

1. Déterminer les composantes <u>complexes</u> du champ électrique $\underline{\vec{E}}_{tot}\,(M,t)$ résultant.
2. Même question pour le champ magnétique $\underline{\vec{B}}_{tot}\,(M,t)$ résultant.

IV. Guide d'onde simplifié

Les champs électromagnétiques de l'onde résultante (ou totale), notée (**O**$_{\mathbf{tot}}$), ont pour composantes, en notation réelle dans le repère (Ox, Oy, Oz) :

$$\vec{E}_{tot}(M,t) = \left| \begin{array}{l} 0 \\ 0 \\ -2E_o \sin(\alpha x) \sin(\omega t - \beta y) \end{array} \right. \qquad \vec{B}_{tot}(M,t) = \left| \begin{array}{l} -2\dfrac{\beta}{\omega} E_o \sin(\alpha x) \sin(\omega t - \beta y) \\ 2\dfrac{\alpha}{\omega} E_o \cos(\alpha x) \cos(\omega t - \beta y) \\ 0 \end{array} \right.$$

avec α et β constantes positives définies plus haut. Cette onde (**O**$_{\mathbf{tot}}$) se propage dans le vide entre deux plans métalliques infinis, parallèles et parfaitement conducteurs, d'équations respectives $x = -\ell$ et $x = +\ell$ (figure **B.2**, page suivante).

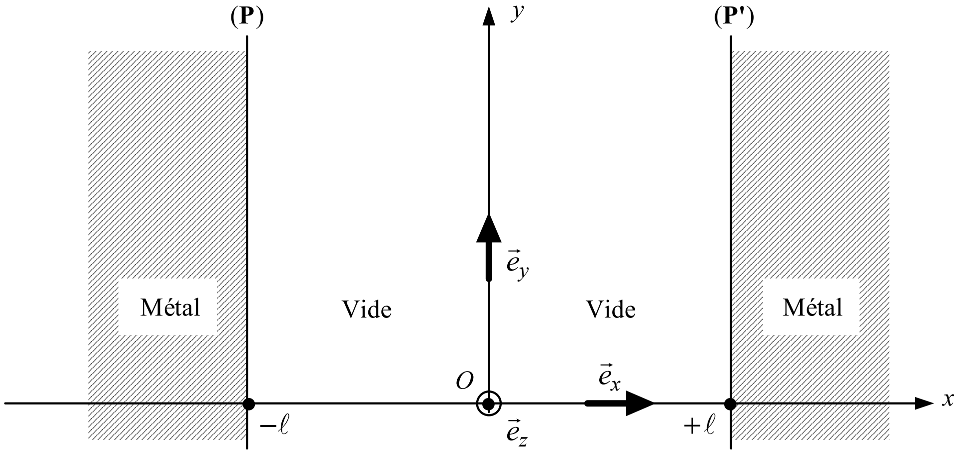

Figure **B.2**

1. Cette onde (**O$_{tot}$**) est-elle progressive ? Si oui, donner sa direction de propagation.
2. Cette onde est-elle une onde plane ? Justifier la réponse.
3. Préciser la nature de cette onde dans le cas particulier où $\beta = 0$.

Dans toute la suite du problème, la constante β sera choisie non nulle et strictement positive : $\beta > 0$.

4. Montrer que la relation $\ell = +\dfrac{(n+1)\pi}{\alpha}$, avec n entier positif ou nul, satisfait aux conditions de continuité des champs électromagnétiques, conditions qui s'écrivent $\overrightarrow{E_T} = \vec{0}$ (composante tangentielle du champ électrique) et $\overrightarrow{B_N} = \vec{0}$ (composante normale du champ magnétique), au niveau de la surface de séparation entre le vide et le milieu parfaitement conducteur, en $x = \pm\ell$, $\forall\ t$.

Dans toute la suite du problème, la valeur de n sera choisie nulle, soit $\ell = +\dfrac{\pi}{\alpha} \Leftrightarrow \alpha = +\dfrac{\pi}{\ell}$.

5. Parallèle au vecteur $\vec{e}_z$, le champ électrique $\vec{E}_{tot}(M,t) = E_z\ \vec{e}_z$ satisfait à l'équation de propagation (formule qui n'est pas à redémontrer) :

$$\Delta\vec{E} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} \text{ qui s'écrit ici : } \frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial z^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 E_z}{\partial t^2}.$$

   Montrer que cette équation permet d'écrire une relation entre les grandeurs β, ℓ, c et ω.
6. Exprimer, en fonction de ω, c et ℓ, la vitesse de phase v_φ (vitesse d'un repère imaginaire par rapport auquel l'onde paraît stationnaire) de l'onde se propageant entre ces deux plans. Comparer v_φ et c.
7. Montrer que ce dispositif ne laisse passer que les ondes électromagnétiques de fréquence ω supérieure à une fréquence de coupure ω_c (filtre passe-haut). Exprimer ω_c en fonction de c et ℓ.
8. *Application numérique* : $c = 3{,}0 \times 10^8$ m s^{-1}.
   Quelle valeur donner à la dimension ℓ du guide d'onde, étudié dans ce problème et conçu pour transporter des ondes de fréquence f supérieure à 25 GHz ($= 25 \times 10^9$ Hz) ?
9. Le milieu est ici « dispersif » car la vitesse de phase v_φ dépend de ω. Dans ce cas, la vitesse de groupe u, ou vitesse de propagation de l'énergie, définie par $u = \dfrac{d\omega}{d\beta}$ est introduite (formule qui n'est pas à redémontrer). Comparer u et c.

10. Le vecteur de Poynting $\vec{P}$ est défini par le produit vectoriel $\vec{P} = \frac{1}{\mu_o} \vec{E} \wedge \vec{B}$.

a) Déterminer les composantes du vecteur de Poynting, en notation réelle, dans le repère (Ox, Oy, Oz).

b) En déduire les composantes réelles de la moyenne temporelle $< \vec{P} >$ de ce vecteur.

c) Quel est le sens physique de cette grandeur vectorielle ? À quelle propagation correspond-elle ? Dans quelle direction ?

Fin de l'énoncé.

IMPRIMERIE NATIONALE – 12 1285 – D'après documents fournis