**CONCOURS NATIONAL D'ADMISSION DANS LES GRANDES ECOLES D'INGENIEURS**

**(Concours national DEUG)**

Epreuve commune à 2 options (Mathématiques et Physique)

## MECANIQUE - PARTIE II

**Durée : 2 heures**

*N.B. : Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.*

Les calculatrices sont interdites

# Exercice 1 :

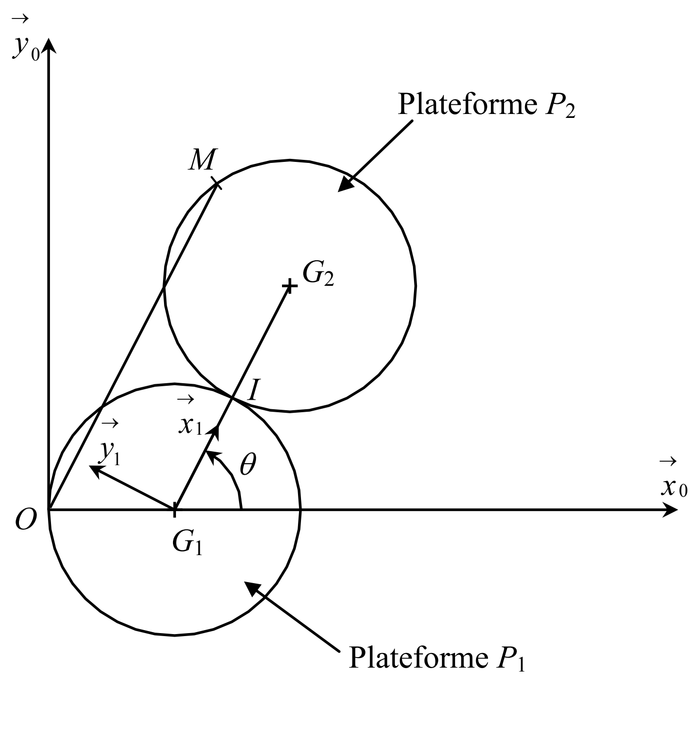



Figure 1

Le référentiel $\Re_0$ est considéré comme galiléen. Il est rapporté au repère $(O,\vec{x_0},\vec{y_0},\vec{z_0})$ où l'axe $O\vec{z_0}$ définit la verticale ascendante.

Un manège est constitué de 2 plateformes horizontales $P_1$ et $P_2$, circulaires de même rayon *R*.

La plateforme $P_1$ est fixe par rapport au référentiel $\Re_0$, sa circonférence passe par l'origine $O$ et son centre $G_1$ est sur l'axe $O\vec{x_0}$.

La plateforme $P_2$, de centre $G_2$, roule sans glisser au point $I$ autour de la plateforme $P_1$ (figure 1).

On note $\omega\vec{z_0}$ le vecteur rotation de la plateforme $P_2$ par rapport à $\Re_0$. On suppose la vitesse angulaire $\omega$ constante.

Le référentiel $\Re_1$ est rapporté au repère orthonormé direct $(G_1,\vec{x_1},\vec{y_1},\vec{z_1})$ tel que $\vec{z_1}=\vec{z_0}$. Le repère $(G_1,\vec{x_1},\vec{y_1},\vec{z_1})$ se déduit à chaque instant de $(G_1,\vec{x_0},\vec{y_0},\vec{z_0})$ par une rotation d'angle $\theta$ autour de l'axe $G_1\vec{z_0}$.

**1.1** Exprimer dans $\Re_1$, et de 2 manières différentes, la vitesse $\vec{V}(G_2 \in P_2/P_1)$ du point $G_2$ appartenant à la plateforme $P_2$ par rapport à la plateforme $P_1$.

**1.2** Exprimer la condition de roulement sans glissement au point *I*.

**1.3** En déduire l'expression de $\dot{\theta}$ en fonction de $\omega$.

On considère un enfant, assimilé à un point matériel *M*, ayant pris place sur un siège du manège en un point de la circonférence de la plateforme $P_2$. La position du point $M$ est donnée par $\vec{OM}=r\,\vec{x_1}$ et on constate que $\vec{OM}$ et $\vec{G_1G_2}$ sont constamment colinéaires.

**1.4** En projetant $\vec{OG_1}$ et $\vec{G_2M}$ suivant $\vec{OM}$, démontrer que l'équation polaire $r(\theta)$ de la trajectoire du point $M$ dans $\Re_0$ peut s'écrire sous la forme $r(\theta)=K(1+\cos\theta)$. On exprimera *K*.

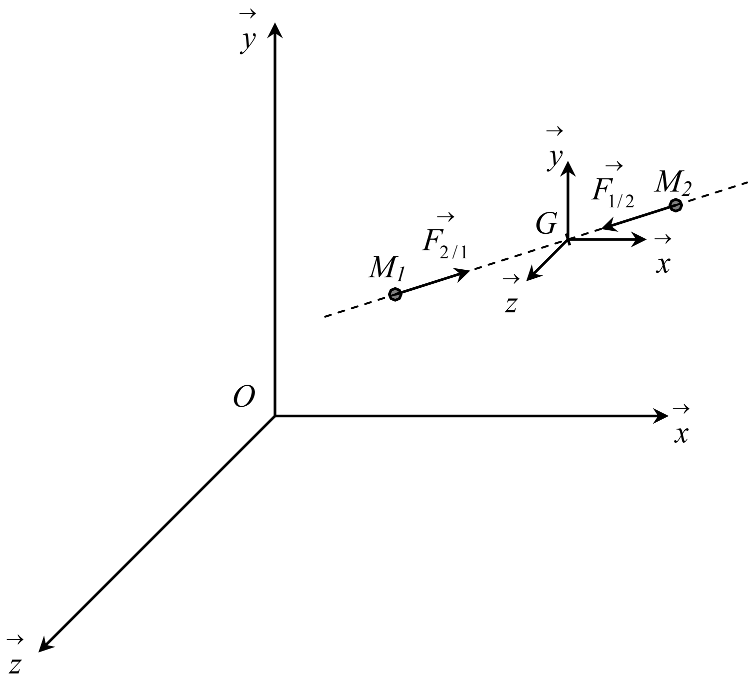
**1.5** Exprimer dans $\Re_1$ la vitesse $\vec{V}(M \in P_2/P_1)$ du point $M$ appartenant à la plateforme $P_2$ par rapport à la plateforme $P_1$ en fonction de $R$, $\omega$ et *t*.

**1.6** Calculer la norme $\left\|\vec{V}(M \in P_2/P_1)\right\|$ de cette vitesse.

**1.7** Déterminer la position $M_1$ du point $M$ où l'enfant pourra descendre facilement du manège.

**1.8** Déterminer la position $M_2$ du point $M$ où l'enfant a le plus de risque de se faire éjecter du manège.

## Exercice 2 :




Soit le référentiel $\Re$ considéré comme galiléen. Il est rapporté au repère $(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$.
Dans ce référentiel, deux particules $M_1$ et $M_2$, de masses $m_1$ et $m_2$, sont en mouvement. On note $\vec{V}(M_1/\Re)$ et $\vec{V}(M_2/\Re)$ leurs vitesses respectives par rapport au référentiel $\Re$.

Les 2 particules ne sont soumises qu'aux seules forces d'intéraction : $\vec{F}_{2/1}$, force exercée par la particule $M_2$ sur la particule $M_1$, et $\vec{F}_{1/2}$, force exercée par la particule $M_1$ sur la particule $M_2$ (figure ci-dessus).

**2.1** Déterminer la vitesse $\vec{V}(G/\Re)$ du centre de masse $G$ du système $S = \{M_1; M_2\}$ par rapport au référentiel $\Re$ en fonction de $m_1$, $m_2$, $\vec{V}(M_1/\Re)$ et $\vec{V}(M_2/\Re)$.

**2.2** Déterminer la valeur de l'accélération $\vec{\Gamma}(G/\Re)$ du centre de masse $G$ par rapport au référentiel $\Re$.

**2.3** En déduire la nature du mouvement du centre de masse *G* dans le référentiel $\Re$.

On considère maintenant le référentiel barycentrique $\Re^*$, rapporté au repère $(G, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$.

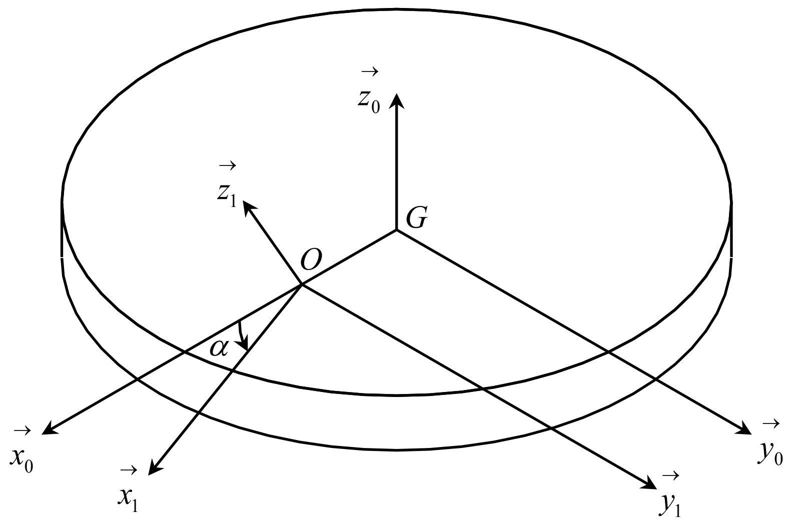
**2.4** Le référentiel barycentrique $\Re^*$ est-il galiléen ? Justifier.

**2.5** Exprimer les vecteurs $\vec{GM_1}$ et $\vec{GM_2}$ en fonction du vecteur $\vec{M_1M_2}$, de $m_1$ et $m_2$.

**2.6** Appliquer le principe fondamental de la dynamique à la particule $M_1$ puis à la particule $M_2$ dans le référentiel barycentrique $\Re^*$.

**2.7** Déduire de l'une de ces relations que l'étude du système $S = \{M_1; M_2\}$ dans le référentiel barycentrique $\Re^*$ peut se réduire à l'étude du mouvement d'une seule particule fictive *P*, de masse $\mu$ soumise à la force $\vec{F}_{2/1}$. On donnera l'expression de $\mu$.

## Exercice 3 :




On considère un cylindre homogène de centre de masse $G$, de rayon $R$, de hauteur $H$ et de masse $m$ (voir figure ci-dessus).

On définit 3 référentiels :

- Le référentiel $\Re_0$ est rapporté au repère $(G, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$, $G\vec{z}_0$ étant l'axe de révolution du cylindre.
- Le référentiel $\Re_0^*$ est rapporté au repère $(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$.
- Le référentiel $\Re_1$ est rapporté au repère $(O, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ tel que $\vec{y}_1 = \vec{y}_0$. Le repère $(O, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ se déduit du repère $(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ par une rotation d'angle $\alpha$ autour de l'axe $O\vec{y}_0$.

On donne $\vec{GO} = e\,\vec{x}_0$.

**3.1** Déterminer la matrice d'inertie $[I_G]_{\Re_0}$ du cylindre au point $G$ dans le référentiel $\Re_0$.

**3.2** Déterminer la matrice d'inertie $[I_O]_{\Re_0^*}$ du cylindre au point $O$ dans le référentiel $\Re_0^*$.

**3.3** Déterminer dans le référentiel $\Re_1$ les moments d'inertie $I_{Ox_1}$, $I_{Oy_1}$, $I_{Oz_1}$ du cylindre par rapport aux axes $O\vec{x}_1$, $O\vec{y}_1$ et $O\vec{z}_1$.

**Fin de l'énoncé**

IMPRIMERIE NATIONALE – 12 1289 – D'après documents fournis