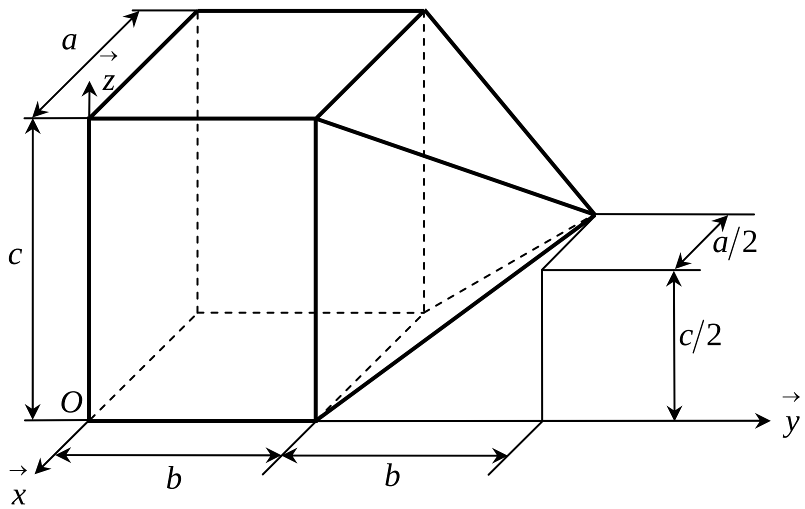
Les calculatrices sont autorisées

Avertissement : Tous les résultats numériques sont demandés dans un format scientifique avec une précision au millième (exemple : $1{,}623.10^{-3}$) et en unité S.I., unité qui est à préciser.

Exercice 1 :

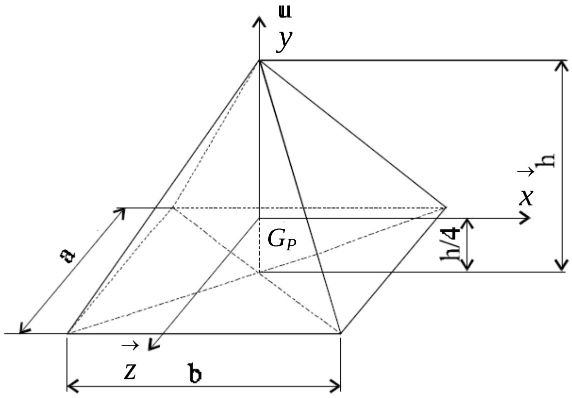


On considère un solide (S) composé d'un parallélépipède rectangle et d'une pyramide. Il est constitué d'un matériau homogène de masse volumique ρ.

Le référentiel $\Re$ est considéré comme galiléen. Il est rapporté au repère $(O,\vec{x},\vec{y},\vec{z})$.

On donne la matrice d'inertie d'une pyramide droite, de base rectangulaire $a \times b$, de hauteur h et de masse M, en son centre de gravité G_P.

$$I_{pyr}(G_P) = \frac{M}{20}\begin{pmatrix} a^2 + \frac{3}{4}h^2 & 0 & 0 \\ 0 & a^2 + b^2 & 0 \\ 0 & 0 & b^2 + \frac{3}{4}h^2 \end{pmatrix}_{(G_P, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}$$

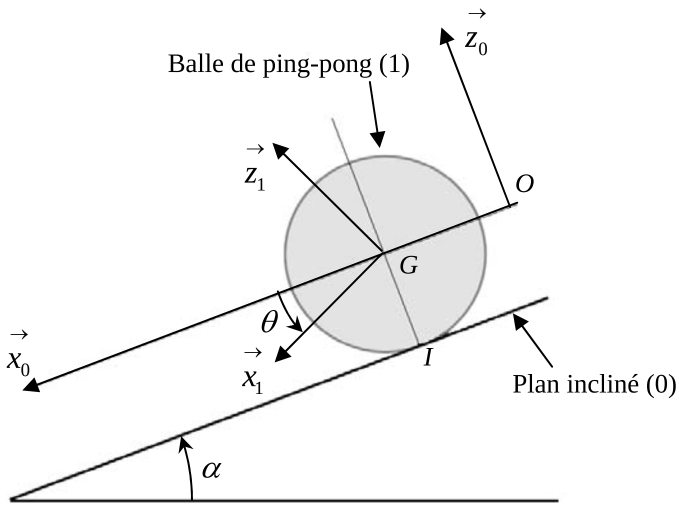


1.1 Déterminer la masse m du solide (S).

1.2 Déterminer les coordonnées y_G du centre de gravité G du solide (S).

1.3 Déterminer numériquement la matrice d'inertie $I_S(G)$ du solide (S) en son centre de gravité G dans le repère $(G, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ pour a = 40 mm, b = 30 mm et c = 40 mm.

Exercice 2 :



Une balle de ping-pong (1), assimilée à une sphère creuse de rayon R, de masse m et de centre de gravité G, roule sans glisser en I sur un plan (0) incliné d'un angle α par rapport à l'horizontale. On note f le coefficient de frottement entre la balle de ping-pong (1) et le plan incliné (0).

Le référentiel $\Re_0$ est considéré comme galiléen. Il est rapporté au repère $(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$.

Le référentiel $\Re_1$ est rapporté au repère orthonormé direct $(G, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ tel que $\vec{y}_1 = \vec{y}_0$. Le repère $(G, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$, lié rigidement à la balle de ping-pong (1) se déduit à chaque instant de $(G, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ par une rotation d'angle θ autour de l'axe $G\vec{y}_0$.

On suppose que la balle de ping-pong (1) ne peut tourner qu'autour de l'axe $G\vec{y}_0$.

On note $\vec{OG} = x\,\vec{x}_0$.

2.1 Exprimer dans $\Re_1$ la vitesse angulaire $\vec{\Omega}(1/0)$ de la balle de ping-pong (1) par rapport au plan incliné (0).

2.2 En vous aidant du champ des vecteurs vitesses, déterminer la vitesse $\vec{V}(G \in 1/0)$ en fonction de R et $\dot{\theta}$.

2.3 En déduire une relation entre $\dot{x}$ et $\dot{\theta}$.

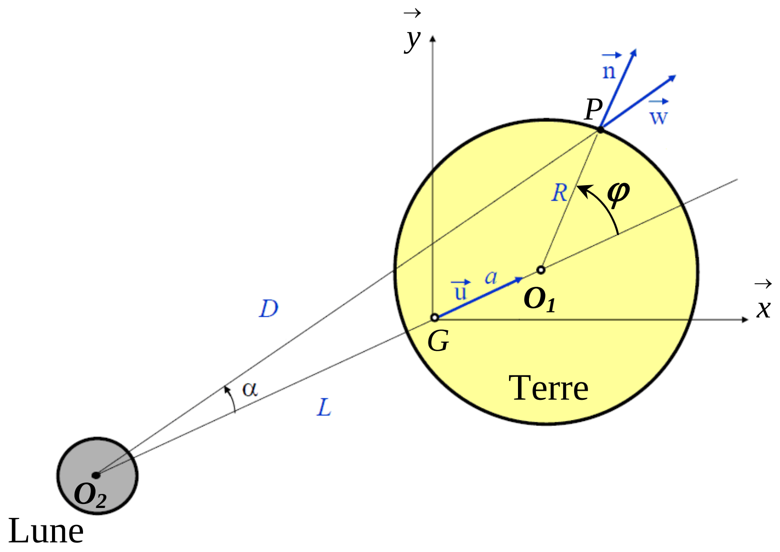
2.4 Déterminer le moment d'inertie I_G de la balle de ping-pong (1) au point G en fonction de m et R.

2.5 En déduire le moment d'inertie I_Δ de la balle de ping-pong (1) par rapport à l'un de ses diamètres en fonction de m et R.

2.6 Appliquer le principe fondamental de la dynamique à la balle de ping-pong (1).

2.7 En déduire la relation liant α et f.

Exercice 3 :



La Terre, de masse m_T, de centre O_1 et de rayon R, tourne autour de l'axe $O_1\vec{z}$ à la vitesse angulaire ω constante.

La Lune, de masse m_L, est assimilée à une sphère de centre O_2. On note $O_1O_2 = L$.

Le centre de masse G du système Terre - Lune est situé sur l'axe (O_1O_2) à la distance a de O_1. Il tourne autour de l'axe $G\vec{z}$ à la vitesse angulaire $\Omega = \sqrt{\dfrac{Km_L}{aL^2}}$ constante, dans lequel K est la constante de gravitation universelle.

Le référentiel $\Re$ est considéré comme galiléen. Il est rapporté au repère $(G, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$.

Le référentiel $\Re_1$ est rapporté au repère orthonormé direct $(G, \vec{u}, \vec{v}, \vec{z})$ tel que $\vec{u}$ désigne le vecteur unitaire de l'axe (O_1O_2) orienté de O_2 vers O_1.

Le référentiel $\Re_2$ est rapporté au repère orthonormé direct $(P, \vec{n}, \vec{t}, \vec{z})$ tel que $\vec{n}$ désigne le vecteur unitaire normal à la Terre. Le repère $(P, \vec{n}, \vec{t}, \vec{z})$ se déduit à chaque instant de $(P, \vec{u}, \vec{v}, \vec{z})$ par une rotation d'angle φ autour de l'axe $P\vec{z}$.

Le référentiel $\Re_3$ est rapporté au repère orthonormé direct $(P,\vec{w},\vec{\tau},\vec{z})$ tel que $\vec{w}$ désigne le vecteur unitaire de l'axe (O_2P) orienté de O_2 vers P. Le repère $(P,\vec{w},\vec{\tau},\vec{z})$ se déduit à chaque instant de $(P,\vec{u},\vec{v},\vec{z})$ par une rotation d'angle α autour de l'axe $P\vec{z}$.
On note D la distance O_2P.
Soit une goutte d'eau *P*, de masse m située à la surface de la Terre dans le plan équatorial (plan de la figure). Cette goutte d'eau est soumise à 3 forces extérieures :

- La réaction de contact $\vec{F_C}$ exercée par la Terre au point *P*.
- La force $\vec{F_T}$ d'attraction gravitationnelle exercée par la Terre.
- La force $\vec{F_L}$ d'attraction gravitationnelle exercée par la Lune.

3.1 Exprimer l'accélération $\vec{a_P} = \left[\dfrac{d^2\vec{GP}}{dt^2}\right]_{\Re_0}$ de la goutte d'eau P en fonction de K, m_L, L, R, ω, $\vec{u}$ et $\vec{n}$.

3.2 Exprimer dans $\Re_2$ la force $\vec{F_T}$ d'attraction gravitationnelle exercée par la Terre sur la goutte d'eau *P*.

3.3 Exprimer dans $\Re_3$ la force $\vec{F_L}$ d'attraction gravitationnelle exercée par la Lune sur la goutte d'eau *P*.

3.4 En appliquant le principe fondamental de la dynamique à la goutte d'eau *P*, déterminer l'action de contact $\vec{F_C}$ exercée par la Terre sur la goutte d'eau (aucune projection n'est demandée ici).

Par la suite, les différents ordres de grandeur entre les distances nous permettent de faire l'approximation suivante : $\dfrac{\vec{u}}{L^2} - \dfrac{\vec{w}}{D^2} = \dfrac{R}{L^3}(2\cos\varphi\,\vec{u} - \sin\varphi\,\vec{v})$.

3.5 Exprimer l'action de contact $\vec{F_C}$ sous la forme : $\vec{F_C} = N\,\vec{n} + T\,\vec{t}$. On exprimera N et T en fonction de l'angle 2φ.

3.6 Déterminer le terme prépondérant dans l'expression de N.

En faisant l'hypothèse que le profil de la Terre est elliptique, on peut en déduire que l'amplitude des marées est égale à : $A = \dfrac{R}{\sin 2\varphi}\left|\dfrac{T}{N}\right|$.

3.7 En déduire l'expression de l'amplitude des marées A_L due à la Lune.

3.8 <u>A.N</u> : Calculer l'amplitude des marées A_L dues à la Lune pour les valeurs suivantes : $R = 6366$ km, $m_T = 5{,}977.10^{24}$ kg, $m_L = 5{,}338.10^{22}$ kg et $L = 3{,}840.10^{8}$ m.

Fin de l'énoncé