Les calculatrices sont autorisées

<u>Avertissement</u> : Tous les résultats numériques sont demandés dans un format scientifique avec une précision au millième (exemple : $1{,}623.10^{-3}$) et en unité S.I., unité qui est à préciser.

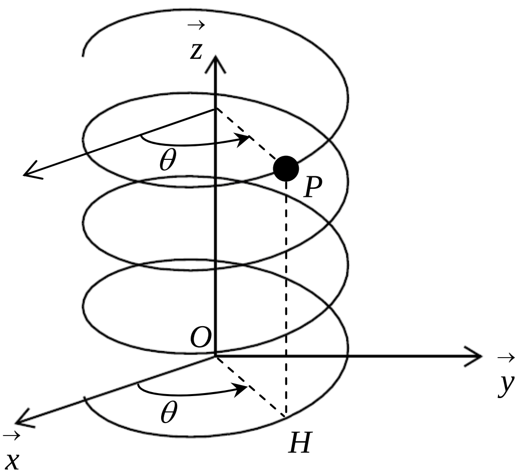
Exercice 1 :

Le référentiel $\Re$, considéré comme galiléen, est rapporté au repère $(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$.

Un mobile P, de masse m, considéré comme ponctuel, est lâché avec une vitesse initiale v_0 d'une hauteur z_0. Il est astreint à glisser sans frottement sur une hélice d'équations :

$$\begin{cases} x = R\cos\theta \\ y = R\sin\theta \\ z = h\theta \end{cases}$$

où R et h sont respectivement le rayon et le pas apparent de l'hélice.



La position du mobile P est repérée grâce à l'angle θ défini dans le plan $\vec{x}O\vec{y}$ par $\theta = (O\vec{x}, \vec{OH})$, où H est la projection orthogonale de P dans le plan $\vec{x}O\vec{y}$.

On note $\vec{g} = -g\,\vec{z}$ l'accélération de la pesanteur.

1.1 Exprimer dans $\Re$ la vitesse $\vec{v}_P$ du mobile P.

1.2 Exprimer dans $\Re$ l'accélération $\vec{a}_P$ du mobile P.

1.3 Réaliser le bilan des actions mécaniques extérieures appliquées au mobile P.

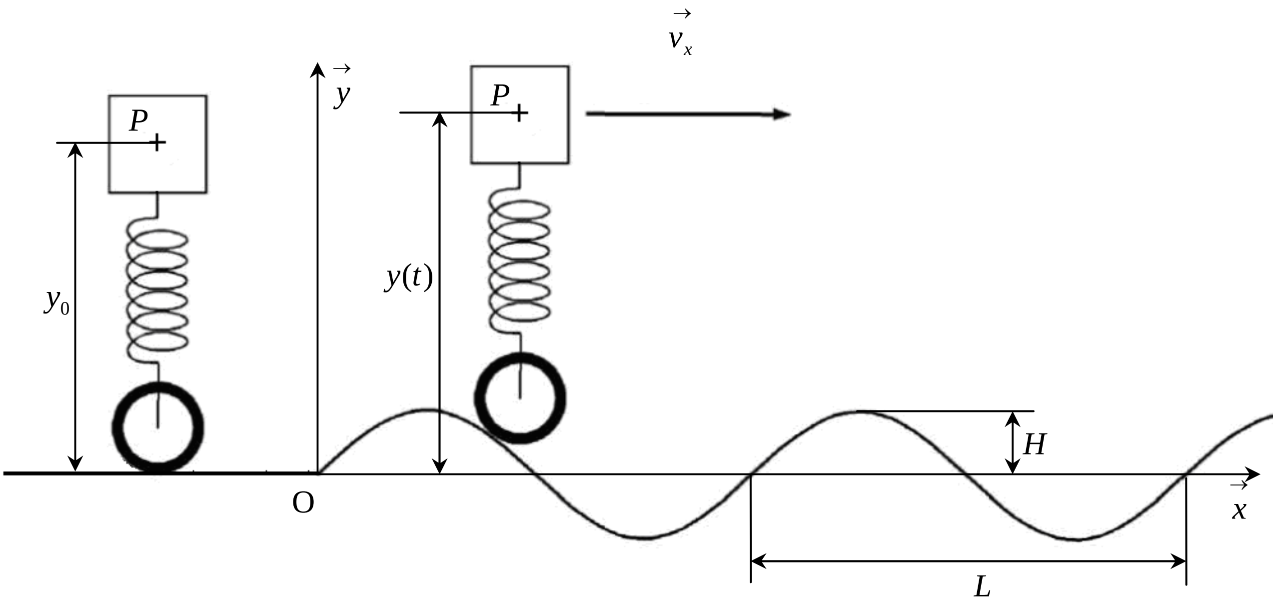
1.4 Énoncer le principe fondamental de la dynamique appliqué au mobile P.

1.5 En déduire l'équation du mouvement.

1.6 Déterminer la loi d'évolution $\theta(t)$ donnant l'angle θ en fonction du temps t, de v_0 et z_0.

1.7 En déduire les composantes de la force de liaison entre le mobile P et l'hélice.

Exercice 2 :



On cherche à modéliser le passage d'une voiture sur un champ de bosses de la façon suivante :

- La voiture est assimilée à un point matériel P pesant de masse m. Elle avance à une vitesse horizontale $\vec{v}_x$ constante.
- La masse m est reliée à un dispositif comportant un ressort de raideur k et de longueur au repos nulle.
- Au bout du ressort, une roulette, de rayon négligeable, sans masse suit le profil du sol.

Le dispositif qui maintient le ressort vertical n'est pas spécifié. On suppose simplement qu'il n'intervient pas dans le mouvement de la masse m.

La voiture se déplace tout d'abord sur une route plate, la masse m étant située à la hauteur y_0.

À l'origine du temps et des abscisses, elle arrive sur un champ de bosses dont le profil est supposé avoir une forme sinusoïdale. La hauteur des bosses est notée H et leur longueur L.

Le référentiel $\Re$ est considéré comme galiléen ; il est rapporté au repère $(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$.

On note $\vec{g} = -g\,\vec{y}$ l'accélération de la pesanteur.

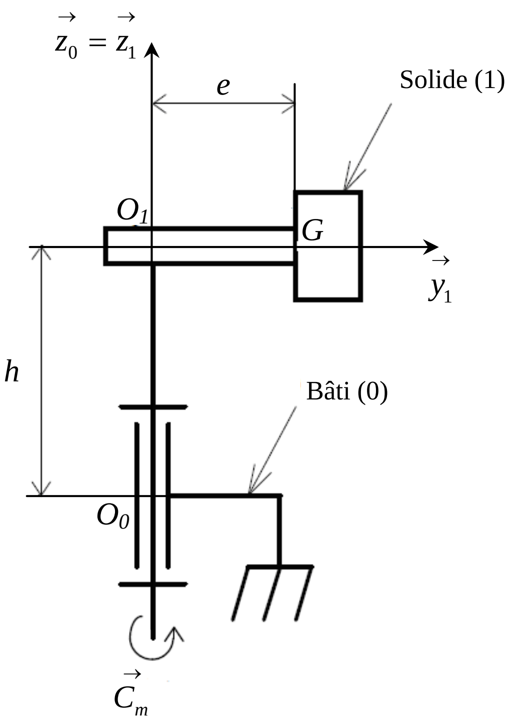
2.1 En supposant que le point de contact entre la roulette et le sol se situe sur l'axe du ressort, déterminer l'équation horaire $h(t)$ de ce point en fonction de H, v_x, L et t.

2.2 En appliquant le principe fondamental de la dynamique en projection sur l'axe $\vec{y}$, déterminer l'équation différentielle liant $\ddot{y}$, y, H, v_x, L et t.

2.3 Résoudre cette équation et en déduire l'équation du mouvement $y(t)$ du point matériel P.

2.4 Pour obtenir un confort maximal, il est nécessaire que la période d'oscillation de la voiture soit égale à celle de la marche à pied soit T. Déterminer l'expression de la vitesse de la voiture afin d'obtenir un confort maximal.

Exercice 3 :



Le référentiel $\Re_0$ est considéré comme galiléen ; il est rapporté au repère $(O_0, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$. Le référentiel absolu $\Re_0$ est associé au bâti (0).

On note $\Re_1$ le référentiel rapporté au repère orthonormé direct $(O_1, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ tel que $\vec{z}_1 = \vec{z}_0$. Le repère $\Re_1$, lié rigidement au solide (1), se déduit à chaque instant de $\Re_0$ par une rotation d'angle θ autour de l'axe $O_0\,\vec{z}_0$.

Un solide (1) de masse m et de centre de gravité G, défini par $\overrightarrow{O_1G} = e\,\vec{y}_1$, est en liaison pivot d'axe $O_0\,\vec{z}_0$, supposée parfaite, avec le bâti (0). Il est entraîné en rotation autour de l'axe $O_0\,\vec{z}_0$ par rapport au bâti (0) grâce à un couple moteur $\vec{C}_m = C_m\,\vec{z}_0$.

On note $\vec{g} = -g\,\vec{z_0}$ l'accélération de la pesanteur.

On donne $\overrightarrow{O_0O_1} = h\,\vec{z_0}$ et $\overrightarrow{O_1G} = e\,\vec{y_1}$.

La matrice d'inertie du solide (1) dans le repère $(O_1, \vec{x_1}, \vec{y_1}, \vec{z_1})$ est : $I_1(O_1) = \begin{pmatrix} A & 0 & -E \\ 0 & B & 0 \\ -E & 0 & C \end{pmatrix}_{(O_1, \vec{x_1}, \vec{y_1}, \vec{z_1})}$.

3.1 Exprimer dans $\Re_1$ la vitesse $\vec{V}(G \in 1/0)$ du point G appartenant au solide (1) par rapport au bâti (0).

3.2 Exprimer dans $\Re_1$ l'accélération $\vec{\Gamma}(G \in 1/0)$ du point G appartenant au solide (1) par rapport au bâti (0).

3.3 Exprimer dans $\Re_1$ le moment cinétique $\vec{L}_{O_1}(1/0)$ du solide (1) par rapport au bâti (0) au point O_1.

3.4 Exprimer dans $\Re_1$ le moment dynamique $\left(\dfrac{d\,\vec{L}_{O_1}(1/0)}{dt}\right)_{\Re_0}$ du solide (1) par rapport au bâti (0) au point O_1.

3.5 En déduire le couple moteur $\vec{C_m} = C_m\,\vec{z_0}$ nécessaire à la mise en rotation du solide (1) en fonction de l'accélération angulaire $\ddot{\theta}$.

Fin de l'énoncé