NB : Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction.
Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

*Les calculatrices **sont autorisées**.*

L'usage de tout ouvrage de référence et de tout document est interdit.

De très nombreuses parties sont <u>indépendantes</u>. Il est conseillé aux candidats de prendre connaissance rapidement de la totalité du texte du sujet.

Les candidats doivent respecter les <u>notations de l'énoncé</u> et préciser, dans chaque cas, la numérotation de la question posée.

Physique des ondes

*Les parties **A**, **B** et **C** sont totalement indépendantes*

Partie A – La corde vibrante

L'espace est rapporté, en coordonnées cartésiennes, à un repère orthonormé direct (Ox, Oy, Oz) de base ($\vec{e}_x$, $\vec{e}_y$, $\vec{e}_z$).

Une fine corde métallique homogène, quasi-inextensible, de masse linéique μ et de longueur L, est tendue entre ses deux extrémités fixes O et A avec une tension constante T (figure **A.1**). À l'équilibre, la corde est horizontale.

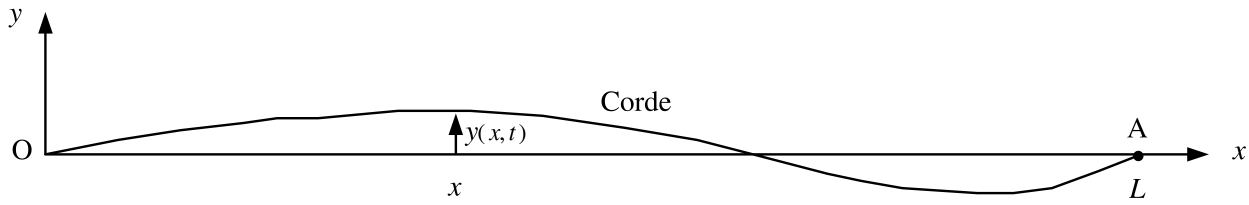

Figure **A.1**

Hypothèses de travail :

- l'action du champ de pesanteur est négligée (sinon, à l'équilibre, la forme de la corde serait une « chaînette ») ;
- la corde est sans raideur : elle transmet intégralement la tension en tout point ;
- les phénomènes dissipatifs (frottements) sont négligés ;
- la vibration purement transversale de la corde s'effectue dans le plan vertical xOy de sorte que les déplacements d'un point matériel lié à la corde n'aient qu'une composante verticale, les déplacements horizontaux étant négligeables : au point d'abscisse x correspond un déplacement transversal $y(x,t)$ qui dépend du temps ;
- les déformations de la corde, par rapport à l'axe horizontal Ox, sont supposées suffisamment faibles pour que l'angle $\alpha(x,t)$ que fait la courbe $y(x,t)$ avec l'horizontale soit un infiniment petit du premier ordre, tout comme la dérivée $\dfrac{\partial y(x,t)}{\partial x}$ (figure **A.2**).

I. Équation de d'Alembert

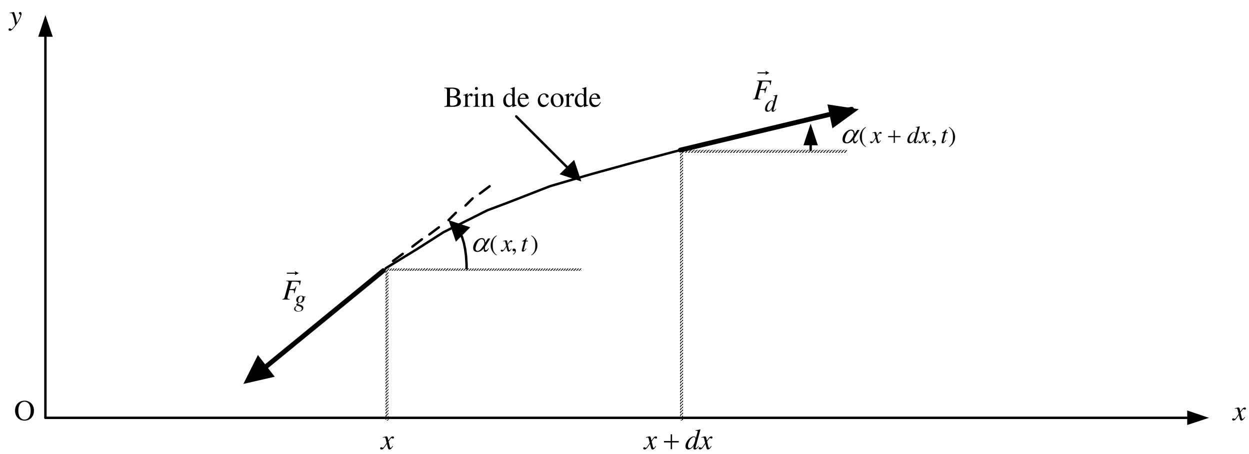

Figure **A.2**

La tension en un point est dirigée selon la tangente à la corde. Une portion élémentaire de corde, située entre les abscisses x et $x+dx$ (figure **A.2**), est soumise simultanément aux actions exercées par :

- la partie gauche de la corde comprenant les points d'abscisse inférieure à x : action réduite à la force $\vec{F}_g$;
- la partie droite de la corde comprenant les points d'abscisse supérieure à $x+dx$: action réduite à la force $\vec{F}_d$.

1. Ces deux forces sont la conséquence de l'application de la tension.
Sachant que $\|\vec{F}_g\| = \|\vec{F}_d\| = T$, formuler, en fonction de T et α, les composantes des vecteurs $\vec{F}_g$ et $\vec{F}_d$, dans le repère (Ox, Oy, Oz).

2. Exprimer, en fonction de μ et dx, la masse dm de cette portion élémentaire de corde, située entre les abscisses x et $x+dx$.

3. Écrire, en projection sur l'axe vertical, le Principe Fondamental de la Dynamique (P.F.D.) appliqué à la portion élémentaire de corde.

4. L'approximation des petits déplacements permet d'écrire : sin $\alpha(x,t) \approx$ tan $\alpha(x,t) \approx \dfrac{\partial y(x,t)}{\partial x}$.
Déduire de l'équation précédente (§ **A.I.3**) l'équation différentielle, dite des cordes vibrantes ou équation d'onde de d'Alembert, de la forme :

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0$$

5. Exprimer la grandeur c associée en fonction des paramètres μ et T et donner son unité.

II. <u>Ondes stationnaires</u>

La corde est fixée en ses deux extrémités O et A : soit $y(0,t) = y(L,t) = 0$. Des ondes stationnaires de vibration de la corde sont recherchées de la forme $y(x,t) = Y \sin(kx+\varphi)\cos(\omega t)$, avec Y amplitude arbitraire, $\vec{k}$ vecteur d'onde, φ constante et ω pulsation.

1. Retrouver la relation existant entre k, c et ω.

2. Quelle valeur admettre pour φ ?

3. Montrer que les vecteurs d'onde $\vec{k}$, de norme k, présentent une suite de valeurs discrètes k_n, avec n entier naturel.

4. En déduire, en fonction de n, L, T et μ, les valeurs des fréquences propres ν_n correspondantes.

5. À quelle situation correspond la valeur $n = 0$?

6. Le mouvement de la corde est étudié à l'aide d'un stroboscope.
a) Dessiner, à un instant t pour lequel cos $(\omega t) \neq 0$, l'allure de la déformation associée au mode de vibration fondamental $n = 1$.
b) Tracer, de la même manière, les déformations associées aux trois premières harmoniques (respectivement n = 2, 3 et 4).

7. Une masse m quasi-ponctuelle (petite perle, par exemple) est enfilée puis fixée au milieu de la corde, au point d'abscisse $x = L/2$ (figure **A.3**, page suivante). À l'aide des schémas dessinés au § **A.II.6**, déterminer, sans calcul, les valeurs de n correspondant aux modes de vibration susceptibles d'être affectés, notamment dans leur fréquence propre, par la présence de cette masse m.

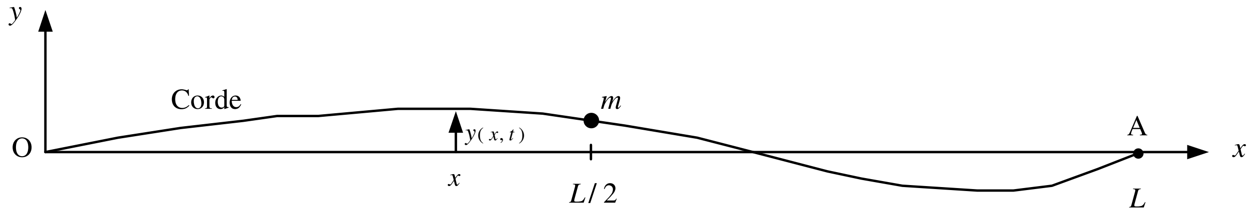

Figure **A.3**

III. <u>Cordes de guitare</u>

Les points O et A de la corde sont solidaires de la caisse de résonance d'une guitare, <u>la perle du § **A.II.7** ayant été retirée</u>.

1. Pour une valeur de n donnée, comment ajuster les paramètres L, μ et T pour produire des sons aigus avec l'instrument ?

2. *Application numérique* :
$L_{(la)} = 0{,}64$ m et $\mu = 7{,}2 \times 10^{-3}$ kg.m^{-1} (pour la note « la »).
Calculer la tension T à exercer pour obtenir la note « la », de fréquence propre la plus basse (fréquence fondamentale) $\nu_1 = 110$ Hz ?

3. Pour le guitariste, les notes accessibles sont quantifiées par des barrettes (frettes), placées sur le manche. Ces frettes permettent de réduire momentanément la longueur L de la corde, la tension T restant constante. En bloquant la corde avec le doigt contre la frette, le guitariste rapproche le point A du point O (figure **A.1**) et obtient la note voulue.

a) Dans le cas de la corde « la », de longueur $L_{(la)}$, où placer la frette pour « monter » la note d'une octave, c'est-à-dire pour doubler la fréquence fondamentale et donc obtenir la fréquence $\nu'_1 = 2\ \nu_1$?

b) La guitare s'appuie sur la gamme « dodécaphonique » (12 sons) : do − do# (ou ré♭) − ré − ré# (ou mi♭) – mi – fa – fa# (ou sol♭) – sol – sol# (ou la♭) – la – la# (ou si♭) – si – do (note de l'octave supérieure). L'intervalle entre deux notes consécutives de cette gamme s'appelle le demi-ton. Le sigle #, ou « dièse », signifie qu'un demi-ton est ajouté à la note et ♭, ou « bémol », qu'un demi-ton est retranché. On passe d'une note de la gamme à la suivante en multipliant la fréquence toujours par la même constante K. En répétant 12 fois l'opération, on retrouve l'intervalle d'une octave. Calculer la valeur de la constante K.

c) Déterminer, en fonction de K et de $L_{(la)}$ (longueur de corde pour la note fondamentale « la »), la distance Δx, sur le manche, entre les deux frettes consécutives permettant de passer du « la » au « la# » (Δx est donc la distance qui sépare les deux premières frettes). Calculer la valeur de Δx.

4. Le fait d'effleurer la corde, sans la presser complètement, permet de la laisser vibrer sur toute sa longueur tout en imposant un nœud de vibration à l'endroit où l'on pose le doigt : ceci a pour effet de supprimer une partie des harmoniques. Dans le cas de la corde « la », de fréquence fondamentale $\nu_1 = 110$ Hz, en effleurant la corde soit au quart soit aux trois quarts de sa longueur $L_{(la)}$, un son plus aigu et très proche de celui du diapason, avec seulement quelques harmoniques supplémentaires, est émis. Évaluer la fréquence f de vibration du diapason.

Partie B – Évolution de l'amplitude d'un signal

Dans le vide, une source quasi-ponctuelle, située au point O, émet un signal sinusoïdal (onde électromagnétique par exemple) qui se propage à la vitesse c dans toutes les directions : l'onde est à symétrie parfaitement sphérique. La source, entretenue, émet une puissance constante $\mathcal{P}$. Le régime est permanent.

Au niveau de la source, le signal s'écrit $s(O,t) = a_o \cos[\omega t - \varphi_{(O)}]$, avec a_o l'amplitude, ω la pulsation et $\varphi_{(O)}$ la phase à l'origine des temps. En un point $M(r)$ de l'espace, repéré par la variable $r = OM$, le signal s'écrit $s(r,t) = a(r) \cos[\omega t - \varphi_{(r)}]$.

Soient dr la distance parcourue par l'onde pendant la durée élémentaire dt et dW l'énergie qui traverse la sphère de centre O, de rayon r et de surface $S = 4\pi r^2$, pendant cette même durée. Soit $w(r)$ la densité volumique d'énergie électromagnétique (unité : $J.m^{-3}$) présente dans l'espace compris entre les deux sphères concentriques de centre O et de rayons respectifs r et $r+dr$ (figure **B.1**).
Il est rappelé que la moyenne temporelle d'une grandeur périodique $f(t)$, de période T, s'écrit :

$$< f(t) > = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)dt\,.$$

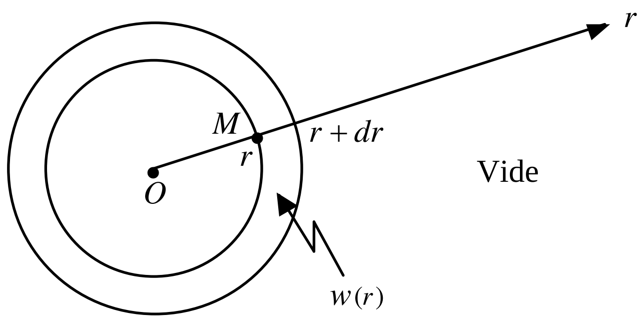

Figure **B.1**

I. Densité volumique d'énergie

1. Exprimer, en fonction de $\varphi_{(O)}$ et des données de l'énoncé, la phase $\varphi_{(r)}$ au point M.

2. Formuler, à l'aide de la grandeur $w(r)$ et de la variable r, l'énergie élémentaire dW.

3. En déduire, en fonction des grandeurs $\mathcal{P}$, c et r, une expression de la densité volumique d'énergie $w(r)$.

II. Évolution de l'amplitude du signal

Pour $r > 0$, il est admis que la densité volumique d'énergie, au point $M(r)$, est proportionnelle à la moyenne temporelle de la grandeur $s^2(r,t)$, soit $w(r) = K < s^2(r,t) >$, avec K constante positive.

1. Calculer, en fonction de $a(r)$, la moyenne temporelle $< s^2(r,t) >$.

2. En déduire, en fonction des constantes $\mathcal{P}$, c, K et de la variable r, l'expression de l'amplitude $a(r)$.

3. Tracer, pour $r \in \,]\, 0, +\infty\, [$, l'allure de la courbe représentative de la fonction $a(r)$.

Partie C – Optique ondulatoire : interférométrie

Les lentilles sphériques minces, considérées dans cette partie et notées (**L$_i$**), sont utilisées dans le cadre de l'approximation de Gauss. Chaque lentille (**L$_i$**) est caractérisée par son centre optique O_i et par sa distance focale image f_i'. Les foyers objet et image sont notés respectivement F_i et F_i'.

Dans tout le problème, les phénomènes de diffraction sont négligés. Les différents montages optiques sont envisagés dans le vide.

Le dispositif interférentiel étudié est de type « bilentilles de Billet ».

I. Image d'une source quasi-ponctuelle

Une source quasi-ponctuelle S est placée au foyer objet F_1 d'une lentille mince convergente (**L$_1$**), d'axe optique $x'x$. Cette source émet une radiation monochromatique de longueur d'onde λ_o. En arrière de (**L$_1$**) et à quelques centimètres de celle-ci, est disposée une seconde lentille convergente (**L$_2$**), de même axe optique $x'x$ et de distance focale f_2'.

1. Situer l'image S_1 de S à travers la première lentille (**L$_1$**).

2. Même question pour l'image S' de S à travers l'ensemble {(**L$_1$**), (**L$_2$**)}.

3. Présenter une construction géométrique de l'image S'.

II. Sciage de la lentille (L$_2$)

La lentille (**L$_2$**) est « sciée » en deux parties égales notées (**A**) et (**B**), suivant un plan contenant l'axe optique $x'x$. En conservant le bord mince de ces deux demi-lentilles dans un même plan orthogonal à l'axe $x'x$, celles-ci sont écartées l'une de l'autre, symétriquement par rapport à $x'x$, d'une distance ε. L'intervalle entre les deux demi-lentilles est obturé par un cache opaque. Le plan contenant $x'x$ et orthogonal au plan de représentation est le plan de symétrie du système optique (figure **C.1**).

1. Proposer une construction géométrique des deux images S'_A et S'_B de l'objet S_1, données respectivement par les demi-lentilles (**A**) et (**B**).

2. Exprimer, en fonction de ε, la distance $\ell = S'_AS'_B$.

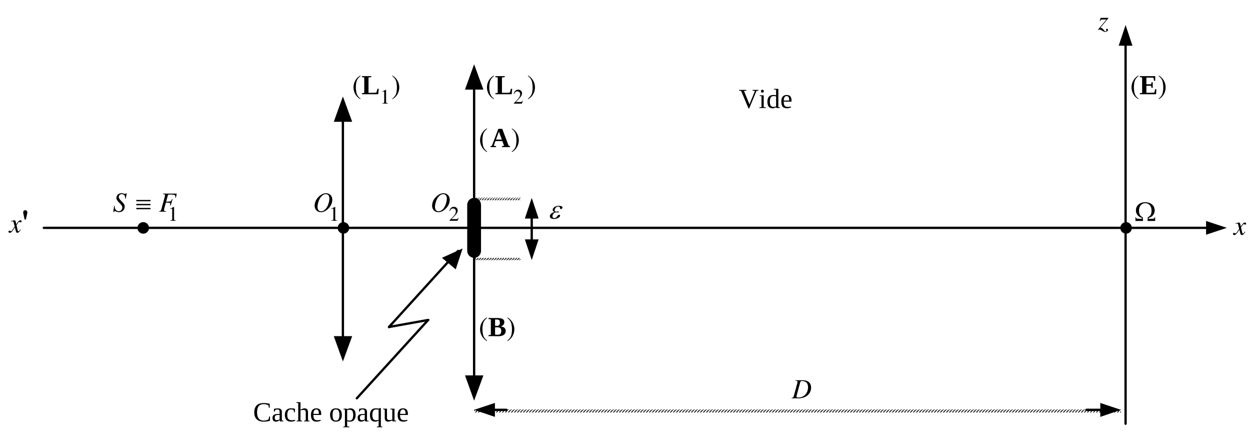

Figure **C.1**

III. Interférences lumineuses

Les images S'_A et S'_B sont deux sources quasi-ponctuelles cohérentes d'un dispositif interférométrique. Le plan d'observation du champ d'interférences est un écran (**E**) perpendiculaire (plan de front) à l'axe optique $x'x$ en Ω et situé à la distance D de (**L₂**). L'écran (**E**) est muni d'un repère cartésien d'axes Ωy et Ωz, avec Ωz parallèle au segment joignant S'_A et S'_B. Le rayon de la monture des lentilles ($\mathbf{L_1}$) et ($\mathbf{L_2}$) est supposé suffisamment grand pour ne pas intervenir dans l'étendue du champ d'interférences.

1. Préciser, sur le dessin (§ **C.II.1**), la zone (ou domaine) d'interférences.

2. Déterminer, en fonction de ε, la largeur Δz (positive) du champ d'interférences dans le plan $y\Omega z$.

3. Si M, de coordonnées $(0, y, z)$, est un point de ce champ, exprimer, en fonction de ε, D, f_2' et z, la différence de marche $\delta(M) = \delta(z)$ entre deux rayons qui interfèrent au point M, sur le plan (**E**).

4. Exprimer, en fonction de ε, D, f_2' et λ_o, l'interfrange i.

5. *Application numérique* :
$\lambda_o = 0{,}5893\ \mu\text{m}$; $f_2' = +\,2{,}50 \times 10^{-1}$ m ; $\varepsilon = 2{,}00 \times 10^{-3}$ m ; $D = 1{,}00$ m.

a) Calculer l'interfrange i.

b) En déduire le nombre N de franges brillantes visibles.

c) (**E**) est un écran, translucide et fin, derrière lequel un observateur peut étudier le champ d'interférences, supposé peu déformé. L'œil, réduit à un point C pour simplifier, est placé sur l'axe $x'x$, à une distance $d = \overline{\Omega C} > 0$ de l'écran. Cet œil peut séparer deux points dont la distance angulaire est supérieure à $\alpha_{min} = 5{,}00 \times 10^{-4}$ rad (α est l'angle sous lequel l'œil observe, depuis C, les deux points). Calculer la valeur maximale $d_{max} = \overline{\Omega C}_{max}$ au-delà de laquelle l'œil, placé en C, ne parvient plus à distinguer deux points de l'écran, proches de Ω et séparés d'une interfrange i.

6. La lumière émise par la source est en réalité un doublet comprenant les deux longueurs d'onde $\lambda_1 = 0{,}5890\ \mu\text{m}$ et $\lambda_2 = 0{,}5896\ \mu\text{m}$.

a) Au bout de combien d'interfranges, comptées à partir de l'origine Ω, les deux systèmes d'interférences devraient-ils se brouiller, c'est-à-dire lorsqu'une première coïncidence, entre une frange sombre d'un système et une frange claire de l'autre, se produit ?

b) Ce phénomène est-il observable avec le dispositif interférométrique utilisé dans ce problème ?

Fin de l'énoncé