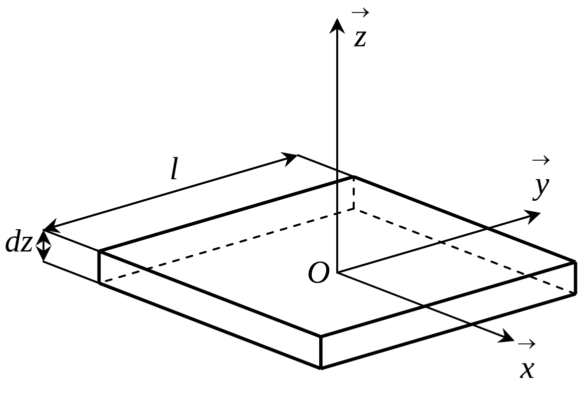
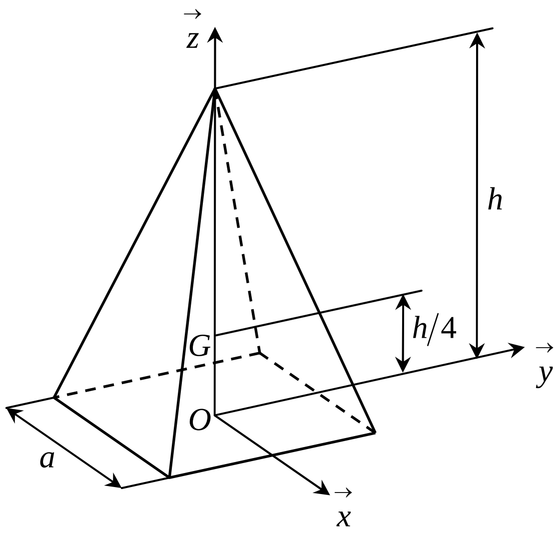
Les calculatrices sont **interdites**.

NB : Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction.
Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Exercice 1 :





On considère tout d'abord une plaque carrée de côté l, d'épaisseur dz et de centre de masse O. Elle est constituée d'un matériau homogène de masse volumique ρ. L'axe $O\vec{z}$ est perpendiculaire à la plaque. Les côtés de la plaque sont parallèles aux axes $O\vec{x}$ et $O\vec{y}$.

Le référentiel $\Re$ est considéré comme galiléen. Il est rapporté au repère $(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$.

1.1 Déterminer le moment d'inertie dJ de la plaque par rapport à l'axe $O\vec{z}$.

On s'intéresse maintenant à une pyramide droite (P), de base carrée de côté a et de hauteur h, constituée du même matériau que la plaque carrée.

On note $M = \frac{1}{3}\rho a^2 h$ la masse de la pyramide (P) et $\overrightarrow{OG} = \frac{h}{4}\vec{z}$ le vecteur position du centre de masse G de la pyramide (P).

1.2 La matrice d'inertie de la pyramide (P) dans le repère $(G, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ est de la forme :

$$\begin{pmatrix} J_x & 0 & 0 \\ 0 & J_x & 0 \\ 0 & 0 & J_z \end{pmatrix}_{(G,x,y,z)}$$

Justifier la forme de la matrice d'inertie de (P) dans le repère $(G, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$.

1.3 A l'aide de la question 1.1, déterminer le moment d'inertie J_z de la pyramide (P) par rapport à l'axe $G\vec{z}$ en fonction de M, a et h.

On donne le moment d'inertie $J_{Gxy} = \frac{3}{80}Mh^2$ de la pyramide (P) par rapport au plan $(G, \vec{x}, \vec{y})$.

1.4 En déduire le moment d'inertie J_x de la pyramide (P) par rapport à l'axe $G\vec{x}$.

La pyramide (P) tourne maintenant autour de l'axe $O\vec{x}$ à la vitesse $\vec{\omega} = \omega\vec{x}$.

1.5 Exprimer dans la base liée à $\Re$ le moment cinétique $\vec{L}_O(P/\Re)$ de la pyramide (P) par rapport à $\Re$ au point *O*.

Exercice 2 :

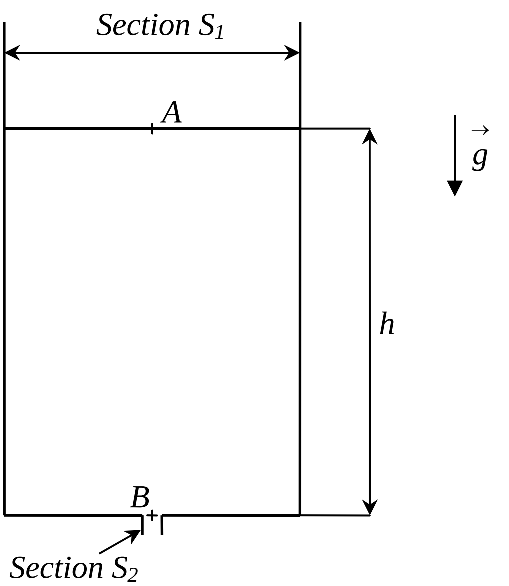
Un réservoir de section S_1 est percé à la base d'un petit trou de section S_2.

On note h_0 la hauteur initiale du liquide dans le réservoir et g l'accélération de la pesanteur.

On note V_A la vitesse au point A de la surface libre du liquide et V_B la vitesse du liquide au point B.

Soit h la hauteur du liquide à l'instant *t*.

On suppose l'écoulement incompressible et stationnaire. On négligera les variations de la pression atmosphérique avec la hauteur.



2.1 Ecrire la conservation du débit volumique entre A et B. En déduire une relation donnant V_B en fonction de V_A, S_1 et S_2.

2.2 Appliquer le théorème de Bernoulli entre les points A et B.

2.3 En déduire une équation différentielle du premier ordre en h que l'on mettra sous la forme :

$$\left(\dot{h}\right)^2 + Kh = 0$$

Donner l'expression de K en fonction de g, S_1 et S_2.

2.4 Résoudre cette équation et déterminer la loi d'évolution de h en fonction de h_0, K et t.

2.5 En déduire le temps T de vidange du réservoir en fonction de h_0 et K.

Exercice 3 :

On considère 3 particules P_1, P_2 et P_3 assimilées à des points matériels de masses respectives m_1, m_2 et m_3 avec $m_1 = m_3 = n.m_2$ et $n \geq 1$. Ces particules peuvent se déplacer sans frottement suivant la direction $O\vec{x}$ d'un référentiel $\Re = (O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$, considéré comme galiléen, $O\vec{y}$ étant la verticale ascendante (*cf. figure 1*).

Initialement, la particule P_2, animée de la vitesse $\vec{v_0} = -v_0\,\vec{x}$, est située entre P_1 et P_3, toutes les deux au repos. La particule P_2 vient heurter la particule P_1, rebondit, puis heurte la particule P_3, rebondit, etc.
On suppose toutes les collisions parfaitement élastiques.

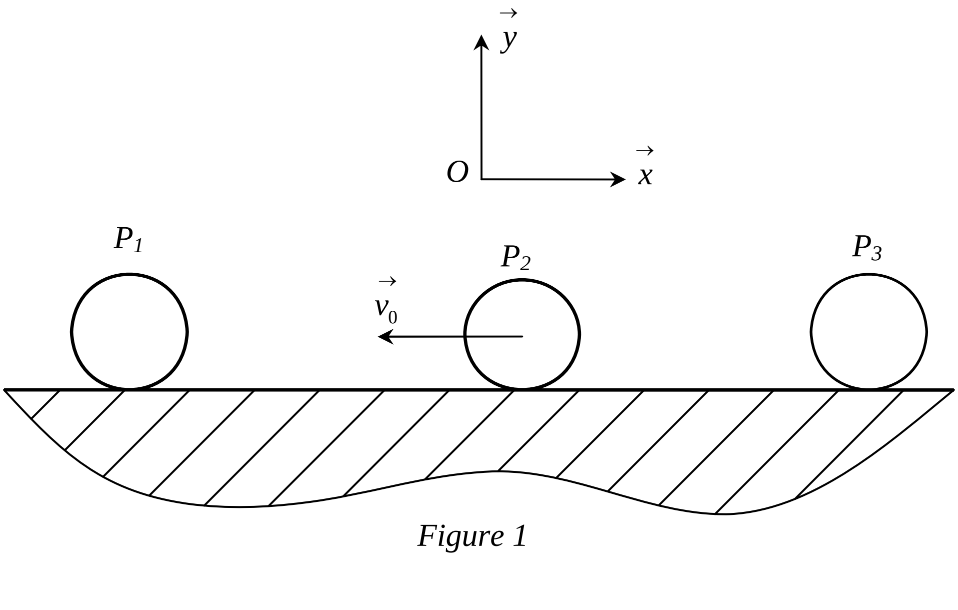


Figure 1

3.1 Déterminer les normes v_1 et v_{21} des vitesses, respectivement, des particules P_1 et P_2 après leur première collision en fonction de n et v_0.

3.2 En déduire les normes v_{22} et v_3 des vitesses, respectivement, des particules P_2 et P_3 après leur première collision en fonction de n et v_0.

3.3 À quelle condition sur n une deuxième collision entre les particules P_1 et P_2 est-elle possible ?

Les particules P_1, P_2 et P_3, toujours alignées, sont maintenant en contact, au repos, dans l'ordre P_1, P_3 puis P_2 (*cf. figure 2*). Une autre particule O, supposée ponctuelle, de masse m_1 et de vitesse v_0, entre en collision (supposée parfaitement élastique) avec la file, du côté de P_1.

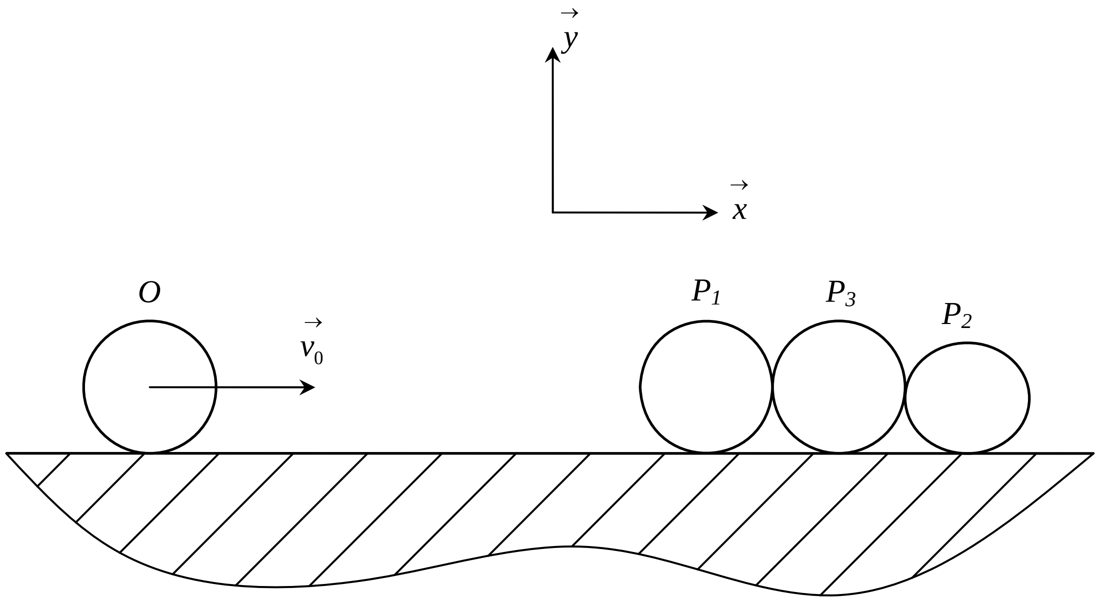


Figure 2

3.4 À quelle condition sur n, seule la particule P_2 est-elle éjectée après la collision ? Les particules P_1 et P_3 restent immobiles après la collision.

Fin de l'énoncé