Les calculatrices sont **interdites**.

NB : Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction.
Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Exercice 1 :

Une fusée balistique, assimilée à un point matériel *M* pesant, est mise à feu à l'instant $t = 0$ depuis le point *O* avec une vitesse $\vec{V_0}$ faisant un angle α avec le plan horizontal $(O, \vec{x}, \vec{y})$. La fusée se déplace uniquement dans le plan vertical $(O, \vec{x}, \vec{z})$.

Le référentiel $\Re$ est considéré comme galiléen ; il est rapporté au repère $(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$.

On note $\vec{g} = -g\,\vec{z}$ l'accélération de la pesanteur.

1.1 Appliquer le principe fondamental de la dynamique au point *M*. En déduire la relation vectorielle liant l'accélération $\vec{a}$ du point *M* et l'accélération $\vec{g}$ de la pesanteur.

1.2 Déterminer les équations paramétrées de la trajectoire du point *M* en fonction de V_0, α, g et t.

1.3 En déduire l'équation de la trajectoire du point *M* sous la forme $z = f(x)$ en fonction de V_0, α et g.

1.4 En déduire la portée P et l'altitude maximale $h_{\max}$ atteinte par la fusée en fonction de V_0, α et g.

1.5 Pour quelle valeur de α la portée P est-elle maximale ? Exprimer la portée maximale $P_{\max}$ en fonction de V_0 et g.

On désire maintenant intercepter la fusée pendant le vol. Pour cela, on lâche sans vitesse initiale, à l'instant t_1 positif, un obus au point N_0 de coordonnées (x_0, z_0). Cet obus sera assimilé à un point matériel N pesant.

1.6 Déterminer les équations paramétrées de la trajectoire de l'obus en fonction de x_0, z_0, g, t_1 et t.

1.7 En déduire à quel instant T s'effectue l'interception.

1.8 En déduire une équation du second degré en t_1 résultant de l'intersection des 2 trajectoires.

1.9 À quelle condition existe-t-il une solution à cette équation ? Où doit se situer le point N_0 d'après cette condition ?

1.10 Déterminer à quel instant t_1 l'obus doit être lâché afin de réussir l'interception en fonction de x_0, z_0, g, V_0 et α.

Exercice 2 :

Le référentiel $\Re$ est considéré comme galiléen ; il est rapporté au repère $(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$.
Un point matériel M se déplace sur une courbe définie par les équations paramétriques suivantes :

$$\begin{cases} x = 2Ae^{\alpha t}\sin\alpha t \\ y = 2Ae^{\alpha t}\cos\alpha t \\ z = Ae^{\alpha t} \end{cases}$$

où A et α sont des constantes
et x, y, z sont les coordonnées cartésiennes du point M à l'instant t.

On désigne par $(M, \vec{\tau}, \vec{n}, \vec{b})$ le repère de Frenet, $\vec{\tau}$ étant le vecteur unitaire tangent en M à la trajectoire, orienté dans le sens du mouvement, $\vec{n}$ le vecteur unitaire normal en M à $\vec{\tau}$ dirigé vers le centre de courbure et $\vec{b}$ complète le repère afin qu'il soit orthonormé direct.
On note s l'abscisse curviligne du point M et R le rayon de courbure de la trajectoire au point M.

2.1 Exprimer dans $\Re$ la vitesse $\vec{V}$ du point M ainsi que sa norme en fonction de A, α et t.

2.2 En déduire l'expression de $\vec{\tau}$ dans le repère $(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$.

2.3 Montrer que la vitesse $\vec{V}$ du point M fait un angle θ constant avec l'axe $O\vec{z}$.

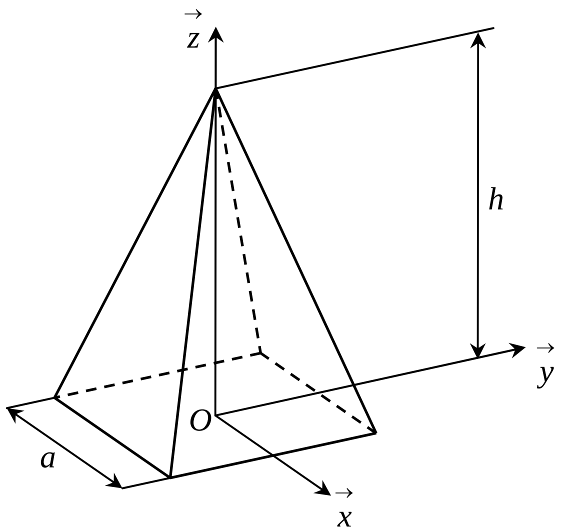
2.4 Exprimer dans $\Re$ l'accélération $\vec{a}$ du point M ainsi que sa norme en fonction de A, α et t.

2.5 Déterminer la norme a_t de l'accélération tangentielle du point M en fonction de A, α et t.

2.6 En déduire la norme a_n de l'accélération normale du point M en fonction de A, α et t.

2.7 En déduire le rayon de courbure R de la trajectoire au point M en fonction de A, α et t. Montrer que R est proportionnel à la coordonnée z du point M.

Exercice 3 :



Le référentiel $\Re$ est considéré comme galiléen. Il est rapporté au repère $(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$.
On s'intéresse à une pyramide droite (P), de base carrée de côté a et de hauteur h, constituée d'un matériau homogène de masse volumique ρ.

3.1 Déterminer la masse M de la pyramide (P) en fonction de ρ, a et h.
3.2 Déterminer la position du centre de masse G de la pyramide (P).

Fin de l'énoncé