CONCOURS NATIONAL D'ADMISSION DANS LES GRANDES ECOLES D'INGENIEURS

(Concours national DEUG)

Epreuve commune à 2 options (Mathématiques et Physique)

MECANIQUE – PARTIE II

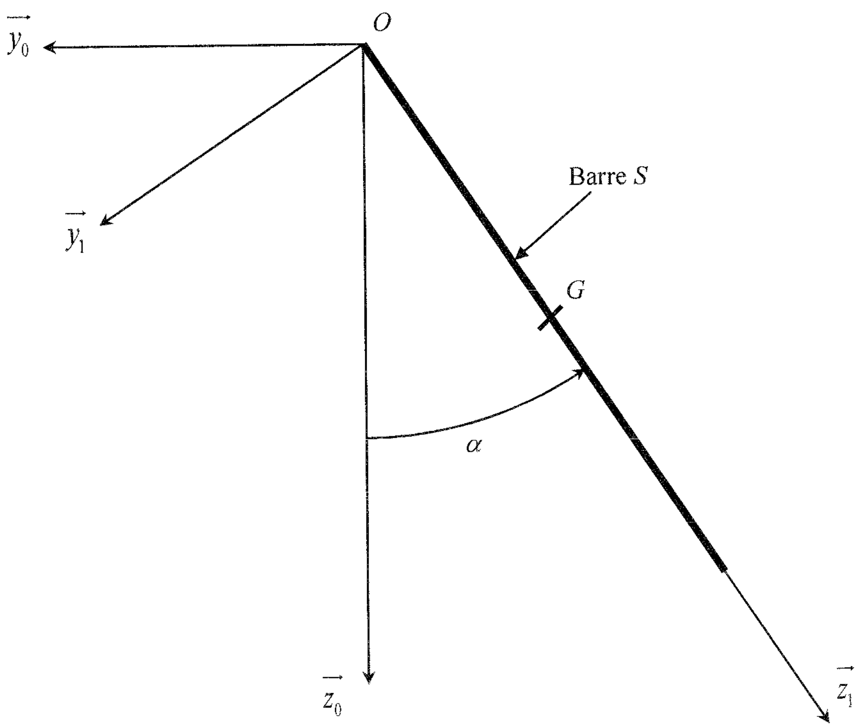
Durée : 2 heures

Les calculatrices sont **autorisées**.

NB : Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction.
Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Avertissement : Tous les résultats numériques sont demandés dans un format scientifique avec une précision au millième (exemple : $1,623.10^{-3}$) et en unité S.I., unité qui est à préciser.

Exercice 1 : Barre constituant un pendule conique



Soit une barre S homogène de longueur $2a$, de masse m et de centre de gravité G. La barre S est articulée sans frottement au point O et tourne autour de la verticale descendante $O\vec{z_0}$ à une vitesse angulaire constante $\vec{\omega} = \omega\,\vec{z_0}$, de manière à décrire la surface latérale d'un cône.

On note α l'angle entre l'axe $O\vec{z_0}$ et la barre S, l'angle α est supposé constant.
On note $\vec{g} = g\vec{z_0}$ l'accélération de la pesanteur.

Le référentiel $\Re_0$ est considéré comme galiléen ; il est rapporté au repère $(O,\vec{x_0},\vec{y_0},\vec{z_0})$.

Le référentiel $\Re_1$ est rapporté au repère orthonormé direct $(O,\vec{x_1},\vec{y_1},\vec{z_1})$ tel que $\vec{x_1} = \vec{x_0}$. Le repère $(O,\vec{x_1},\vec{y_1},\vec{z_1})$ est lié rigidement à la barre S tel que $\overrightarrow{OG} = a\,\vec{z_1}$.

1.1 Déterminer le moment d'inertie J_{Gy1} de la barre S par rapport à l'axe $G\vec{y_1}$. En déduire le moment d'inertie J_{Oy1} de la barre S par rapport à l'axe $O\vec{y_1}$.

1.2 En déduire la matrice d'inertie de la barre S au point O dans $\Re_1$.

1.3 Exprimer dans $\Re_1$ le vecteur rotation $\vec{\omega}$.

1.4 En déduire dans la base liée à $\Re_1$ le moment cinétique $\vec{L_O}(S/\Re_0)$ du solide (S) par rapport à $\Re_0$ au point O.

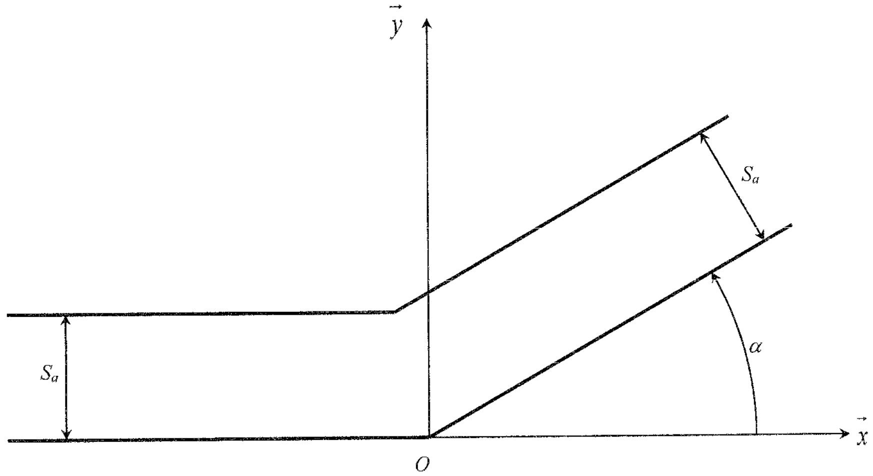
1.5 En appliquant le théorème du moment cinétique à la barre, déterminer l'angle α en fonction de g, a et ω.

1.6 Déterminer l'énergie cinétique $T(S/\Re_0)$ de la barre (S) dans son mouvement par rapport à $\Re_0$.

1.7 Déterminer la puissance P_{ext} des efforts extérieurs appliqués à la barre.

1.8 En appliquant le théorème de l'énergie cinétique à la barre, retrouver le résultat de la question 1.2.

Exercice 2 : Propulsion d'un bateau à voile



On considère une veine de fluide incompressible et non visqueux, de masse volumique ρ constante.
La veine fluide subit un coude incliné d'un angle α par rapport à l'axe $\vec{x}$.

La section S_a de la veine fluide est supposée constante. Le plan $\vec{x}\,O\,\vec{y}$ est supposé horizontal.

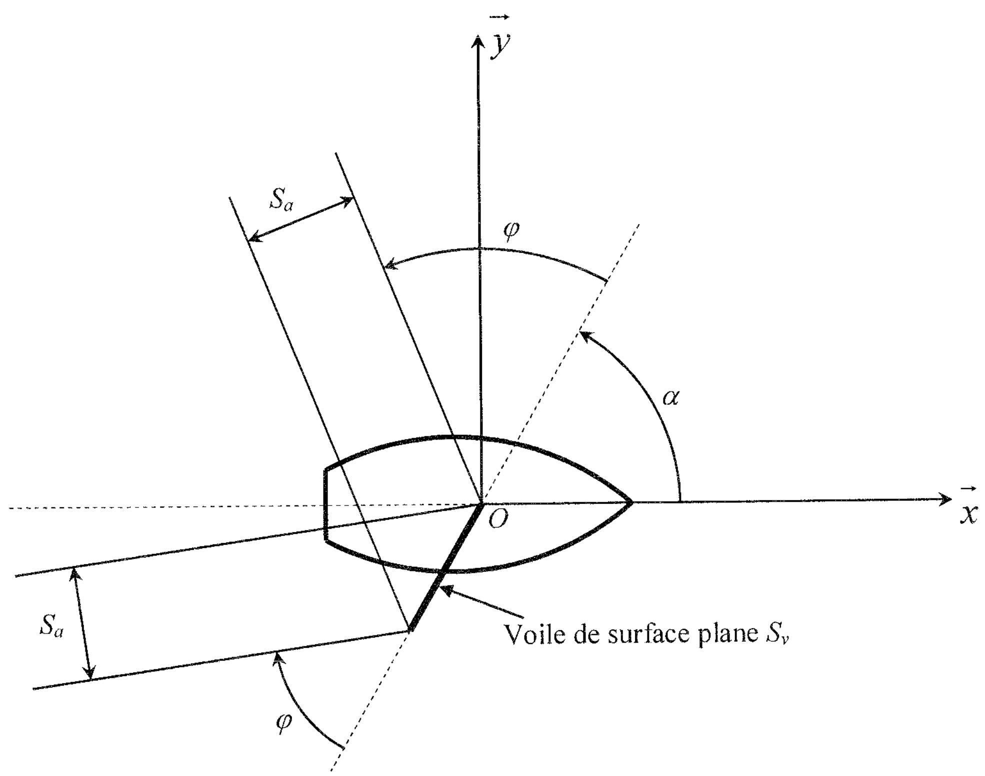
On note $\vec{V_1} = V_1\,\vec{x}$ la vitesse du fluide situé avant le coude, la norme V_1 étant constante et uniforme, et on note $\vec{V_2}$ la vitesse du fluide situé après le coude.

2.1 Déterminer les composantes de $\vec{V_2}$ sur les axes $\vec{x}$ et $\vec{y}$ en fonction de V_1 et α.

2.2 En déduire la force $\vec{F}$ exercée par le fluide sur le coude en fonction de ρ, S_a, V_1 et α.

On étudie maintenant un bateau propulsé à l'aide d'une voile dont la surface plane S_v est inclinée d'un angle α par rapport à l'axe $\vec{x}$.
On fait les hypothèses suivantes :

- L'action de la voile consiste à dévier de 2φ le tube de courant qui aurait traversé S_v en l'absence de voile.
- La voile n'altère pas de façon sensible l'écoulement de l'air en dehors du tube de courant.
- La voile est assimilée à un coude dans un tube de courant d'air s'écoulant à vitesse constante en module.
- La masse volumique de l'air ρ reste constante.



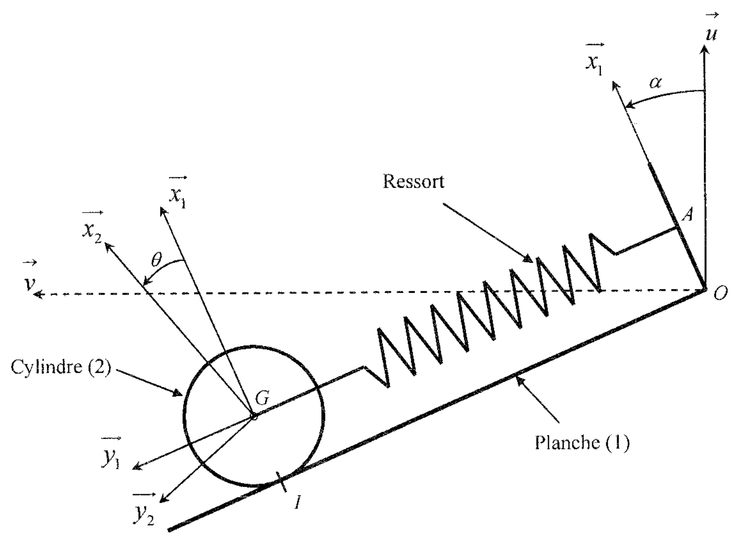
2.3 Donner la relation géométrique entre S_a section du tube de courant d'air, S_v surface plane de la voile et l'angle φ.

2.4 Déterminer la composante F_x sur l'axe $\vec{x}$ de la force exercée par le vent sur la voile.

Exercice 3 : Oscillation d'un cylindre

On considère un cylindre (2) de masse m et de rayon R accroché au point G à un ressort de raideur k et de longueur libre L_0 fixé à une planche (1). L'axe du cylindre (2) est toujours confondu avec l'axe $\vec{z_1}$. La planche (1) est inclinée d'un angle $\alpha = \alpha_0$ constant par rapport à l'horizontale.

On note $\overrightarrow{AG} = y\,\vec{y_1}$ et y_0 la distance AG à l'équilibre.



Le référentiel $\Re$ est considéré comme galiléen ; il est rapporté au repère $(O, \vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$.

Le référentiel $\Re_1$ est rapporté au repère orthonormé direct $(O, \vec{x_1}, \vec{y_1}, \vec{z_1})$ tel que $\vec{z_1} = \vec{w}$. Le repère $(O, \vec{x_1}, \vec{y_1}, \vec{z_1})$, lié rigidement à la planche (1) se déduit à chaque instant de $(O, \vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ par une rotation d'angle α autour de l'axe $O\vec{w}$.

Le référentiel $\Re_2$ est rapporté au repère orthonormé direct $(G, \vec{x_2}, \vec{y_2}, \vec{z_2})$ tel que $\vec{z_2} = \vec{z_1}$. Le repère $(G, \vec{x_2}, \vec{y_2}, \vec{z_2})$, lié rigidement au cylindre (2) se déduit à chaque instant de $(G, \vec{x_1}, \vec{y_1}, \vec{z_1})$ par une rotation d'angle θ autour de l'axe $G\vec{z_1}$.

3.1 Etablir la relation liant α_0 et y_0.

On excite le système ce qui induit une variation de l'angle α suivant la loi : $\alpha(t) = \alpha_0 + A\sin\omega t$ où A est très petit devant α_0.

On suppose un roulement sans glissement du cylindre (2) sur la planche (1)

3.2 Etablir la relation entre $\dot{\theta}$ et $\dot{y}$ assurant le non glissement au point I.

3.3 Déterminer le moment dynamique $\overrightarrow{D_I(2/\Re_0)}$ du cylindre (2) dans son mouvement par rapport à $\Re_0$ au point I en fonction de m, R et $\ddot{y}$.

3.4 En appliquant le théorème du moment cinétique au cylindre (2) au point I en projection sur l'axe $\vec{z_1}$, déterminer l'équation différentielle du mouvement du centre de masse G du cylindre (2).

Fin de l'énoncé