SESSION 2009 **DGME103**

CONCOURS NATIONAL D'ADMISSION DANS LES GRANDES ECOLES D'INGENIEURS

(Concours national DEUG)

Epreuve commune aux 3 options (Mathématiques, Physique, Chimie)

MECANIQUE – PARTIE I

Durée : 2 heures

Les calculatrices sont **autorisées**.

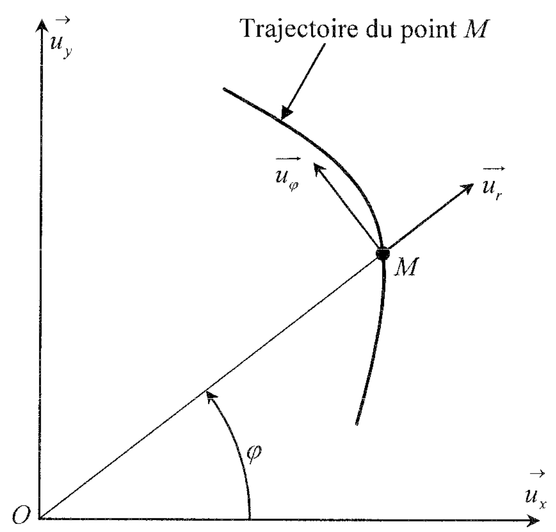
NB : Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction.
Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Avertissement : Tous les résultats numériques sont demandés dans un format scientifique avec une précision au millième (exemple : $1{,}623.10^{-3}$) et en unité S.I., unité qui est à préciser.

Exercice 1: Mouvement à accélération centrale

Un point M, de masse m, décrit, dans le référentiel $\Re_0$ rapporté au repère orthonormé direct $(O,\vec{u}_x,\vec{u}_y,\vec{u}_z)$, une trajectoire située dans le plan $\vec{u}_x O \vec{u}_y$ de façon à ce que son accélération passe toujours par un point fixe O (mouvement à accélération centrale).
La position du point M est définie par $\overrightarrow{OM} = r\,\vec{u}_r$ et l'angle φ entre $\vec{u}_x$ et $\vec{u}_r$.

On note $\vec{V}$ la vitesse du point M et $\vec{a}$ son accélération.



1.1 Définir le moment cinétique $\vec{\sigma}_O$ du point M par rapport au point O.

1.2 Déterminer l'expression de $\dfrac{d\vec{\sigma}_O}{dt}$. Que peut-on en conclure dans le cas des mouvements à accélération centrale ?

1.3 Déterminer dans $\Re_0$ la vitesse $\vec{V}$ du point M en fonction des coordonnées polaires $(r,\ \varphi)$.

1.4 Donner l'expression du moment cinétique σ_O en fonction de m, r et de $\dot{\varphi}$.

1.5 Déterminer dans $\Re_0$ l'accélération $\vec{a}$ du point M en fonction des coordonnées polaires $(r,\ \varphi)$.

1.6 En déduire la loi des aires.

1.7 Exprimer, en fonction de σ_O, la surface élémentaire dS balayée par le vecteur $\overrightarrow{OM}$ pendant l'intervalle de temps dt.

On admet maintenant que la trajectoire de M est un cercle de centre O et de rayon R.

1.8 Déterminer les composantes de $\vec{a}$ dans la base polaire $(\vec{u}_r\ ,\ \vec{u}_\varphi)$.

1.9 En déduire les expressions de $\dot{\varphi}$ et du moment cinétique σ_O.

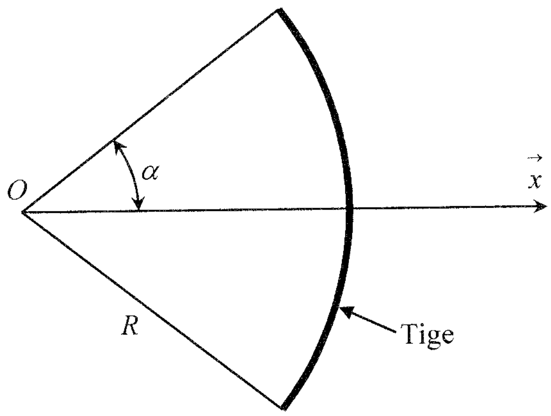
1.10 Que devient l'expression de la vitesse $\vec{V}$ du point M pour ce mouvement ?

1.11 En déduire la nature du mouvement du point M.

1.12 Déterminer le temps T nécessaire au point M pour décrire le cercle de centre O et de rayon R en fonction de $\dot{\varphi}$.

Exercice 2 : Equilibre d'une tige

Soit une tige homogène de masse m et rigide en forme d'arc de cercle vue sous un angle 2α du point O. On note R le rayon du cercle de centre O.

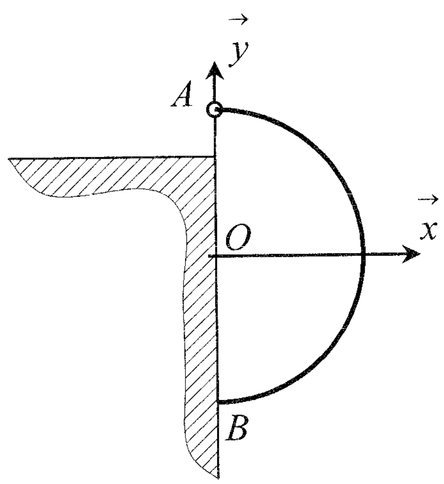


2.1 Déterminer la position du centre de masse G de la tige.

On considère maintenant que la tige est en forme de demi-cercle ($\alpha = \frac{\pi}{2}$), dans le plan $\vec{x}O\vec{y}$, l'axe $O\vec{x}$ étant un axe de symétrie pour la tige. L'axe $O\vec{y}$ représente la verticale ascendante.

On note $\vec{g} = -g\,\vec{y}$ l'accélération de la pesanteur.

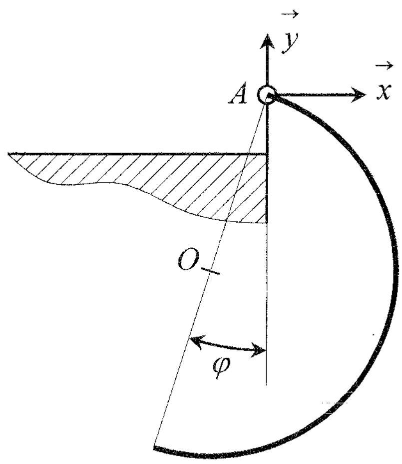
Cette tige est supportée par une articulation sans frottement en A et repose en B sans frottement contre la paroi verticale.



2.2 Déterminer les efforts exercés sur la tige en A et B.

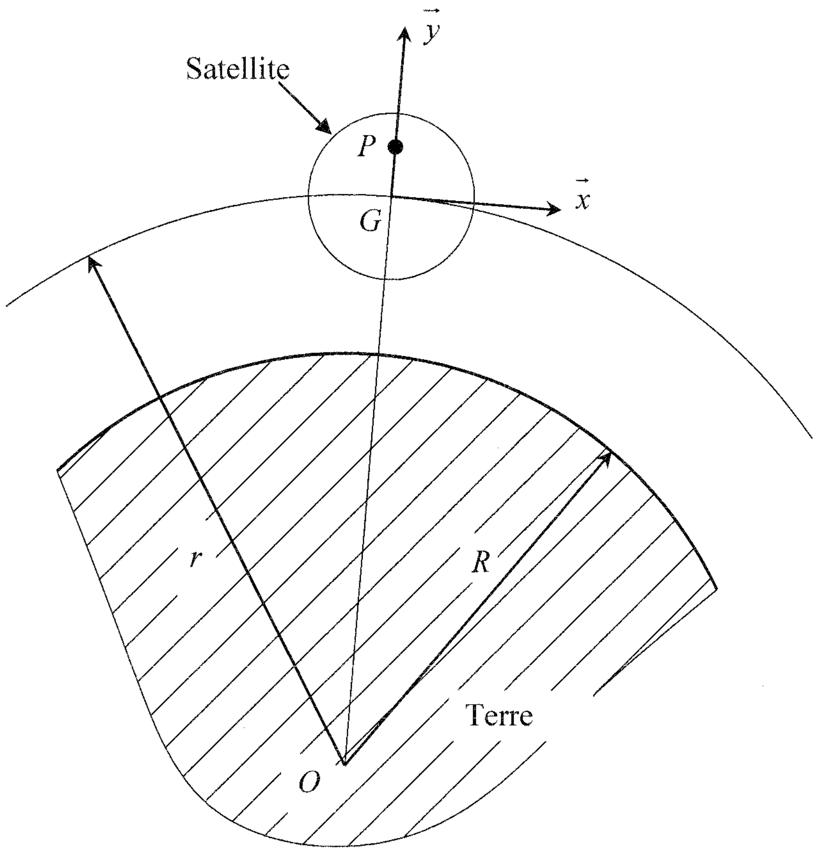
Maintenant la tige n'est plus supportée qu'au point A.

2.3 Déterminer la valeur de l'angle φ, défini ci-contre, lorsque la tige est en équilibre.



Exercice 3 : Objet en mouvement à l'intérieur d'un satellite

La Terre est assimilable à une sphère de centre O et de rayon R. La masse M de la Terre est supposée distribuée en couches sphériques homogènes.
Un satellite artificiel S, de centre de masse G, décrit dans le référentiel géocentrique, considéré comme galiléen, une orbite circulaire de centre O et de rayon r à la vitesse angulaire ω.
On note g_0 l'intensité du champ de gravitation à la surface de la Terre et $g(r)$ celle au niveau de l'orbite.



3.1 Exprimer $g(r)$ et ω en fonction de R, g_0 et r.

A l'intérieur du satellite S se trouve un tube de longueur $GA=a$ et d'axe $G\vec{y}$, définissant la verticale ascendante. Dans ce tube, un point P de masse m faible devant celle de S peut coulisser sans frottement.
On note y la distance entre le point P et G. On considère y comme petit devant r.

3.2 En appliquant le théorème de la résultante dynamique au point P, en projection sur l'axe $G\vec{y}$, établir l'équation différentielle du second ordre du mouvement de P.

Le point P est abandonné sans vitesse initiale par rapport à S à la distance y_0 du point G à l'instant $t=0$.

3.3 Déterminer l'expression de y à la date t.

3.4 <u>Application numérique</u> : Déterminer le temps T lorsque le point P arrive à l'extrémité A du tube sachant que $R = 6400$ km, $g_0 = 9,8$ m.s^{-2}, $r = 6700$ km, $y_0 = 1$ m et $a = 2$ m.

3.5 En appliquant le théorème de la résultante dynamique au point P en projection sur l'axe $G\vec{x}$, déterminer à la date t, inférieure à T, l'expression de la force exercée par P sur le tube.

Fin de l'énoncé