Les calculatrices sont **autorisées**.

NB : Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction.
Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Avertissement : Tous les résultats numériques sont demandés dans un format scientifique avec une précision au millième (exemple : $1{,}623.10^{-3}$) et en unité S.I., unité qui est à préciser.

Exercice 1 : Déviation des projectiles

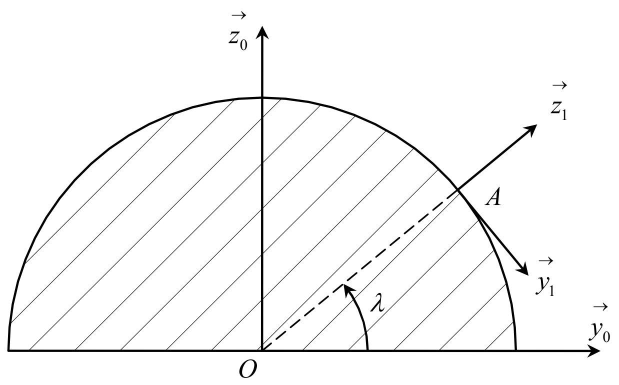


Figure 1

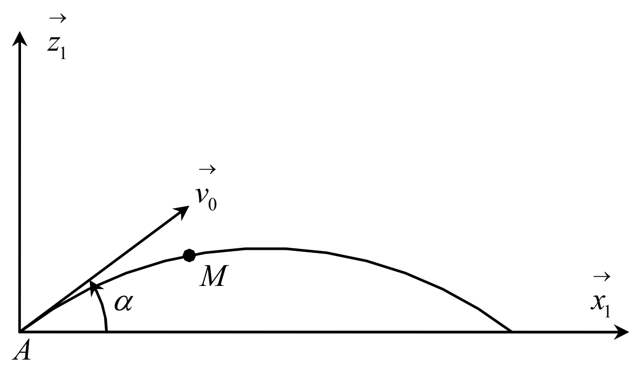


Figure 2

Dans le référentiel géocentrique $\Re_0(O,\overrightarrow{x_0},\overrightarrow{y_0},\overrightarrow{z_0})$, $O\overrightarrow{z_0}$ étant l'axe de rotation de la Terre, on considère un lieu de latitude λ et le référentiel terrestre $\Re_T(A,\overrightarrow{x_1},\overrightarrow{y_1},\overrightarrow{z_1})$ où $\overrightarrow{z_1}$ est la verticale ascendante (Figure 1).
En A, un canon tire dans le plan $(A,\overrightarrow{x_1},\overrightarrow{z_1})$ un obus, assimilable à un point matériel M de masse m, dont la vitesse initiale $\overrightarrow{v_0}$ fait avec le plan horizontal un angle α (Figure 2).
On néglige la résistance de l'air ainsi que la variation de l'accélération de la pesanteur $\vec{g}=-g\,\overrightarrow{z_1}$ avec l'altitude.
On pose $\overrightarrow{OM}=x\,\overrightarrow{x_1}+y\,\overrightarrow{y_1}+z\,\overrightarrow{z_1}$

On considère tout d'abord le référentiel terrestre comme galiléen.

1.1 Dans le repère $\Re_T$, déterminer l'équation de la trajectoire de l'obus.

1.2 Exprimer la portée P et l'altitude maximale $z_{\max}$ atteinte en fonction de v_0, α et g.

1.3 <u>Application numérique</u> : Calculer P et $z_{\max}$ pour $\alpha = 30°$, $v_0 = 800\,\mathrm{m.s^{-1}}$ et $g = 9{,}8\,\mathrm{m.s^{-2}}$.

On tient compte maintenant de la force d'inertie de Coriolis.

1.4 Exprimer le vecteur rotation $\vec{\Omega} = \omega \vec{z_0}$ de la Terre dans le repère $\Re_T$.

1.5 En déduire l'expression de la force d'inertie de Coriolis $\vec{F_C}$ dans le mouvement de $\Re_T$ par rapport à $\Re_0$ en fonction de m, ω, λ, et des composantes $\dot{x}$, $\dot{y}$ et $\dot{z}$ de la vitesse du point M dans $\Re_T$.

On néglige la force d'inertie d'entraînement $\vec{F_e}$ devant la force d'inertie de Coriolis $\vec{F_C}$.

1.6 En appliquant le principe fondamental de la dynamique à l'obus dans $\Re_T$, déterminer les équations différentielles du mouvement.

1.7 Intégrer les équations différentielles en $\ddot{y}$ et $\ddot{z}$ afin d'obtenir $\dot{y}$ et $\dot{z}$ en fonction de x, t, g, ω, λ, v_0 et α.

1.8 En déduire l'équation différentielle régissant le mouvement de l'obus suivant l'axe $\vec{x}$.

La vitesse de rotation de la Terre étant assez faible, on néglige le terme $4\omega^2 x$ devant $\ddot{x}$.

1.9 En déduire l'équation donnant x en fonction du temps t.

1.10 En déduire les équations donnant y et z en fonction du temps t.

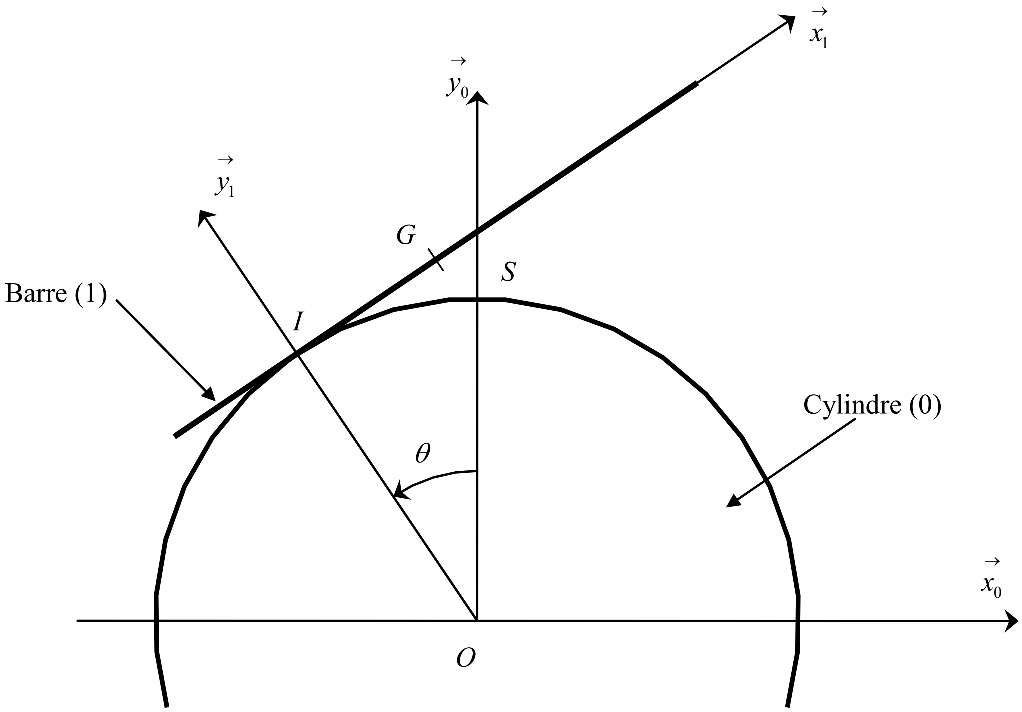
1.11 En négligeant les termes en ω^2 devant les autres, déterminer le temps t_2 de retombée de l'obus.

Le point A possède une latitude $\lambda = 45°$

1.12 <u>Application numérique</u> : Calculer le temps t_2 et la portée P_x suivant l'axe $\vec{x}$ de l'obus. Conclure quant à une éventuelle déviation vers l'est de l'obus.

1.13 <u>Application numérique</u> : Calculer la portée P_z suivant l'axe $\vec{z}$ de l'obus. Cette déviation est-elle vers le sud ou vers le nord ? Justifier.

Exercice 2 : Barre roulant sur un cylindre



Le référentiel $\Re_0$ est considéré comme galiléen ; il est rapporté au repère $\left(O, \overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{y_0}, \overrightarrow{z_0}\right)$. Le référentiel $\Re_0$ est lié au cylindre (0) fixe de centre *O* et de rayon *R*.

Une barre homogène (1) de centre de gravité *G*, de longueur *a* et de masse *M* roule sans glisser sur le cylindre (0) tout en restant dans le plan vertical $\left(O, \overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{y_0}\right)$.

Le référentiel $\Re_1$ est rapporté au repère orthonormé direct $\left(G, \overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{y_1}, \overrightarrow{z_1}\right)$ tel que $\overrightarrow{z_1} = \overrightarrow{z_0}$. Le repère $\left(G, \overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{y_1}, \overrightarrow{z_1}\right)$, lié rigidement à la barre (1) se déduit à chaque instant de $\left(O, \overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{y_0}, \overrightarrow{z_0}\right)$ par une rotation d'angle θ autour de l'axe $G\overrightarrow{z_0}$.

On note *I* le point de contact entre la barre (1) et le cylindre (0). Pour $\theta = 0$, le point *G* est en contact avec le point *S* du cylindre (0) défini par $\overrightarrow{OS} = R\,\overrightarrow{y_0}$.

L'accélération de la pesanteur est notée $\vec{g} = -g\,\overrightarrow{y_0}$.

2.1 Déterminer la vitesse $\vec{V}\left(G \in 1/0\right)$ du point *G* appartenant à la barre (1) par rapport au cylindre (0) et l'exprimer dans $\Re_1$ en fonction de *R*, θ et $\dot{\theta} = \dfrac{d\theta}{dt}$.

2.2 Déterminer le moment d'inertie de la barre (1) par rapport à l'axe $G\overrightarrow{z_1}$ en fonction de *M* et *a*.

2.3 En utilisant le théorème de Koenig, déterminer l'énergie cinétique $T(1/0)$ de la barre (1) dans $\Re_0$ en fonction de M, a, R, θ et $\dot{\theta}$.

2.4 Déterminer la puissance P_e des efforts extérieurs appliqués à la barre (1).

2.5 Enoncer le théorème de l'énergie cinétique.

2.6 En déduire l'équation du mouvement de la barre (1).

Exercice 3 : Rôle régulateur d'un volant d'inertie

L'ensemble d'une machine tournante et de son volant d'inertie est assimilable à un solide S mobile autour d'un axe fixe Δ.
S étant immobile à la date $t = 0$, on lui applique à partir de cette date un couple moteur C_m.
On note ω la vitesse angulaire de S à la date t et J le moment d'inertie de S par rapport à l'axe Δ.
Des frottements fluides exercent un couple résistant de module $C_r = h\omega$.
Dans un premier temps, on considère que le couple moteur $C_m = C_0$ est indépendant de la date t.

3.1 Appliquer le théorème du moment cinétique au solide S en projection sur l'axe Δ.
3.2 En déduire l'expression de la vitesse angulaire $\omega(t)$ à la date t.

A la suite de défauts de fabrication, le couple moteur C_m est maintenant modulé suivant la loi :

$$C_m(t) = C_0\left(1 + a\cos\Omega t\right) \text{ où } a \text{ est le taux de modulation}$$

3.3 Montrer que la vitesse angulaire de S est aussi modulée suivant une loi semblable :

$$\omega(t) = \frac{C_0}{h}\left[1 - e^{-ht/J} + b\cos\left(\Omega t - \varphi\right)\right]$$

3.4 Expliciter le taux de modulation b de la vitesse angulaire en fonction de a, J, h et Ω.
3.5 Que convient-il de faire afin d'obtenir une vitesse de rotation aussi constante que possible ?

Fin de l'énoncé