SESSION 2007

CONCOURS NATIONAL D'ADMISSION DANS LES GRANDES ECOLES D'INGENIEURS

(Concours National DEUG)

Epreuve commune à 2 options (Mathématiques et Physique)

PHYSIQUE - PARTIE II

Durée : 2 heures

NB : le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction.

Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

*Les calculatrices sont **autorisées**.*

*L'usage de tout ouvrage de référence et de tout document est **interdit**.*

De très nombreuses parties sont indépendantes. Il est conseillé aux candidats de prendre connaissance rapidement de la totalité du texte du sujet.

Les candidats doivent respecter les notations de l'énoncé et préciser, dans chaque cas, la numérotation de la question traitée.

—QUELQUES CIRCUITS ÉLECTRIQUES—

Les parties **A, B** et **C** sont totalement indépendantes

Partie A : étude préliminaire d'une diffusion thermique et électrique

L'espace est rapporté, en coordonnées cartésiennes, à un repère orthonormé direct (Ox, Oy, Oz) de base $\left(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z\right)$.

Un cylindre circulaire droit (**C**), homogène, isotrope et d'axe Ox, est limité par deux sections droites (**S₁**) et (**S₂**), orthogonales à l'axe Ox, de rayon r et distantes de ℓ. Soit (**Sₑ**) la surface latérale de ce cylindre (figure **1**).

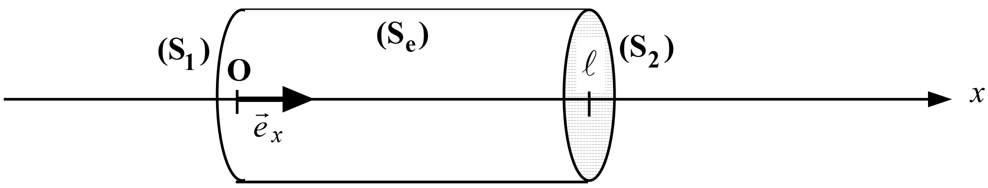

Figure **1**

Ce cylindre, constitué d'un matériau de conductivité thermique λ constante, est conducteur de la chaleur et ce phénomène est envisagé en régime permanent et stationnaire. La conduction thermique est unidirectionnelle et parallèle à l'axe Ox : les surfaces isothermes sont planes et perpendiculaires à l'axe Ox. Grâce à des sources, les sections terminales sont maintenues à des températures constantes respectives $T(x=0) = T_1$ et $T(x=\ell) = T_2$, avec $T_1 > T_2$ (figure **2**).

Soit Φ_{th} le flux thermique qui traverse une section droite, d'aire S et orthogonale à l'axe Ox. Le vecteur associé au flux est le vecteur densité de courant thermique $\vec{j}_{th}$, lié à la température par la loi de Fourier : $\vec{j}_{th} = -\lambda\,\overrightarrow{grad}\,T$. Le système étant unidimensionnel et la propagation unidirectionnelle, on peut écrire :

$$\vec{j}_{th} = j_{th}(x)\;\vec{e}_x = -\lambda\,\frac{dT(x)}{dx}\;\vec{e}_x.$$

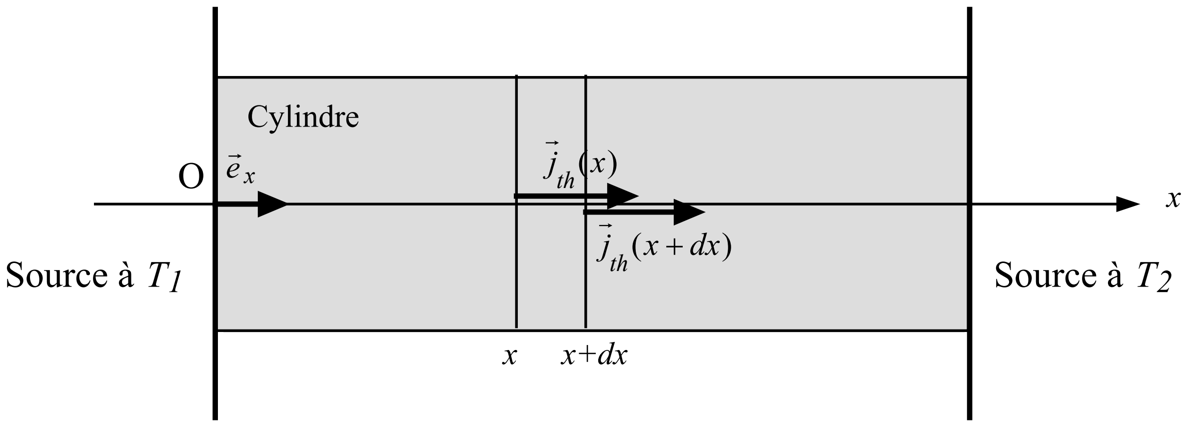

Figure **2**

I. Diffusion thermique dans un barreau calorifugé

La surface latérale (**S$_e$**) est parfaitement calorifugée.

1) Exprimer le flux thermique (ou puissance thermique) Φ_{th} qui traverse une section droite d'abscisse x, en fonction de la densité de courant thermique $j_{th}(x)$ et de l'aire S de la section.
2) Soit la tranche élémentaire cylindrique de matériau d'épaisseur dx, comprise entre les plans d'abscisses x et $x+dx$. Sachant qu'en régime permanent, il n'y a aucune accumulation d'énergie en tout point du matériau, proposer un bilan thermique de l'élément de volume en considérant le flux thermique entrant et le flux thermique sortant.
3) En déduire l'équation différentielle vérifiée par la température $T(x)$ à l'intérieur du cylindre.
4) Etablir la loi de variation $T(x)$.
5) Tracer l'allure de la courbe représentative de cette fonction $T(x)$.

II. Diffusion thermique avec pertes latérales

Le cylindre (**C**) est maintenant soumis, à travers sa surface latérale (**S$_e$**), à des pertes thermiques latérales, vers l'extérieur (source à température constante T_e). La conduction demeure essentiellement unidirectionnelle et parallèle à l'axe Ox, et $T(x)$ est la température locale uniforme à l'abscisse x. Les pertes correspondent à une puissance thermique $dP_e = h\,[T(x) - T_e]\,dS_e$, expression dans laquelle h est une constante positive et dS_e la surface latérale de la tranche élémentaire comprise entre les sections d'abscisses x et $x+dx$.

1) Donner la relation existant entre dS_e et dx.
2) Le régime est permanent : proposer un bilan des flux thermiques, en raisonnant sur une tranche élémentaire de matériau d'épaisseur dx.
3) En déduire l'équation différentielle vérifiée par la fonction $(T(x) - T_e)$.
4) La loi de variation de la température se met sous la forme :
$T(x) = A + B\,exp(\omega x) + C\,exp(-\omega x)$.
Exprimer les constantes A et ω en fonction des données de l'énoncé.

III. Diffusion thermique et électrique

Le cylindre (**C**), conducteur de l'énergie thermique, mais aussi de l'électricité, est thermiquement et électriquement isolé sur sa face latérale. Les sections terminales (**S$_1$**) et (**S$_2$**) sont maintenues simultanément à des températures constantes respectives T_1 et T_2, et à des potentiels constants respectifs V_1 et V_2. Il s'établit un régime stationnaire : les surfaces isothermes et équipotentielles sont planes et perpendiculaires à l'axe Ox. La conductivité électrique σ est indépendante de la température dans le domaine considéré, et le cylindre est considéré comme un conducteur ohmique, bien que $T(x)$ ne soit pas uniforme.

1) Exprimer, par application de la loi d'Ohm, en fonction de σ, S et dx, la résistance dR de la tranche élémentaire d'épaisseur dx.
2) I est l'intensité constante du courant qui traverse le cylindre. Il est rappelé que la puissance électrique reçue par un résistor, de résistance R et parcouru par un tel courant, s'écrit $P_{él} = R\,I^2$. En déduire la puissance électrique $dP_{él}$ reçue par la tranche élémentaire précédente.
3) Le régime est permanent : écrire le bilan thermique de cette tranche élémentaire d'épaisseur dx, en tenant compte du flux thermique entrant, du flux thermique sortant et de la puissance thermique reçue par effet Joule.
4) En déduire l'équation différentielle vérifiée par la température $T(x)$ à l'intérieur du cylindre.
5) Les températures des sections terminales sont maintenues égales à T_o.
5.1 Établir la loi de variation $T(x)$ de la température.

5.2 Tracer l'allure de la courbe représentative de cette fonction $T(x)$.
5.3 La température présente une valeur maximale T_m. Déterminer $x(T_m)$.
5.4 Exprimer les flux thermiques $\Phi_{th,1}$ et $\Phi_{th,2}$ sortant de chacune des sections terminales.
5.5 *Application numérique.*

$\sigma = 1{,}0\times10^5\ \Omega^{-1}.\ m^{-1}$; $\lambda = 1{,}0$ W. $m^{-1}.\ K^{-1}$; $\ell = 1{,}0\times10^{-2}$ m ;
$I = 10$ A ; $T_o = 300$ K ; $S = 5{,}0\times10^{-5}\ m^2$.

Calculer $(T_m - T_o)$, $\Phi_{th,1}$ et $\Phi_{th,2}$.

Partie B : étude d'un capteur de pression

I. Pont de résistors

Un pont de quatre résistors, de résistances respectives R_1, R_2, R_3 et R_4, est alimenté par une source indépendante de tension E constante (figure **3**).

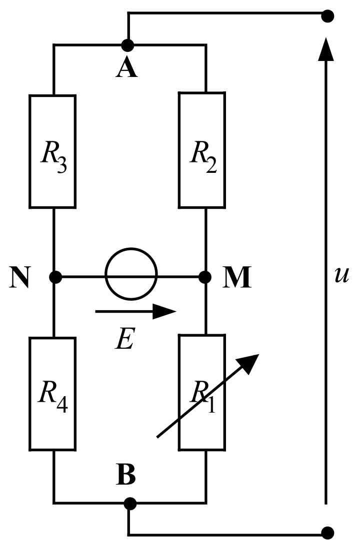

Figure **3**

1) Établir la relation existant entre les résistances R_1, R_2, R_3 et R_4, à « l'équilibre » du pont, c'est-à-dire lorsque la tension $u = (V_A - V_B)$ s'annule.
2) Comment se nomme ce pont ?
3) Les résistances R_2, R_3 et R_4 ont même valeur R, et le pont est « équilibré ».
3.1 Exprimer R_1 en fonction de R.
3.2 La résistance R_1 varie de ΔR_1. Exprimer, en fonction de E, R et ΔR_1, la nouvelle valeur de la tension u.

II. Jauge d'extensométrie

Le résistor, de résistance R_1, est en fait le cylindre (**C**) étudié précédemment (figure **1**), et utilisé comme jauge d'extensométrie. Le solide (**C**), de longueur ℓ et de section droite d'aire S, est immergé dans le fluide. Il est admis que le volume du cylindre est suffisamment réduit pour considérer une pression uniforme P en tout point de la surface de (**C**). Sous l'effet d'une augmentation de pression ΔP, le cylindre subit un allongement $\Delta\ell$ de sa longueur ℓ et une contraction de son rayon, et, simultanément, la résistance R_1 varie de ΔR_1, selon une loi du type $\Delta R_1 = \alpha\ .\ R_1.\ \Delta P$, avec α constante positive.

1) Au cours de la modification géométrique de (**C**), la masse m du cylindre demeure invariable, et sa masse volumique μ uniforme et constante. Montrer que la déformation s'effectue à volume V constant.

2) Il est admis que les lignes de courant restent, dans (**C**), longitudinales (parallèles à l'axe Ox). Exprimer, en fonction de σ (conductivité du matériau), ℓ et V, la résistance R_1.

3) Les dimensions de (**C**) subissent de petites variations. La conductivité σ reste uniforme et constante. Déterminer une relation entre les variations relatives $\Delta R_1/R_1$ et $\Delta\ell/\ell$.

4) Le pont est initialement « équilibré » : $u = 0$. Après une augmentation de pression ΔP, la tension u atteint la valeur u_1. Exprimer, en fonction des grandeurs E, α et u_1, l'augmentation de pression ΔP.

5) *Application numérique.* $E = 6{,}0$ V ; $\alpha = 2{,}0 \times 10^{-6}$ Pa^{-1} ; $u_1 = 3{,}0 \times 10^{-3}$ V.

5.1 Calculer la valeur de l'augmentation de pression ΔP.

5.2 Calculer la variation relative $\Delta\ell/\ell$ de la longueur ℓ du cylindre.

III. Dispositif d'amplification

La faiblesse du signal (tension u) nécessite un dispositif amplificateur de tension (figure **4**). Le montage à deux « étages » utilise trois amplificateurs opérationnels (A.O.) idéaux, en fonctionnement linéaire. La tension u, fournie par le capteur, est traitée par un premier étage amplificateur. La tension u' intermédiaire obtenue est amplifiée, à son tour, par un montage soustracteur (second étage).

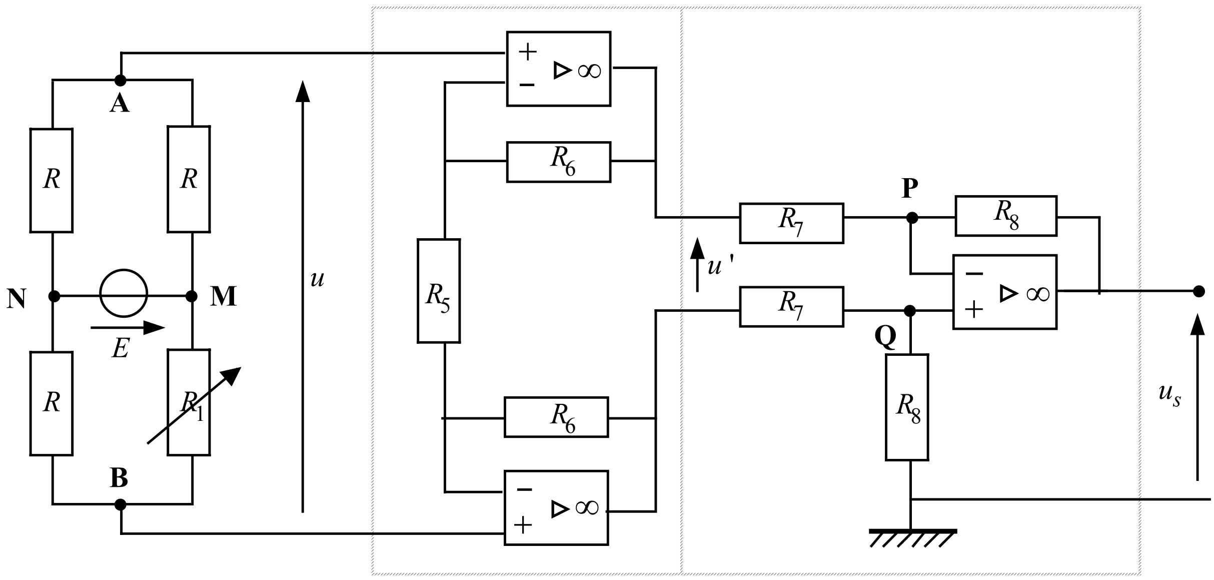

Figure **4**

1) Déterminer, en fonction des grandeurs u, R_5 et R_6, l'expression de la tension intermédiaire u'.

2) Exprimer, en fonction des grandeurs u', R_7 et R_8, la tension de sortie u_s.

3) Établir la fonction de transfert globale $u_s = f(u)$ en exprimant, en fonction de la tension u délivrée par le capteur et des différentes résistances, la tension de sortie u_s.

4) *Application numérique.* $R_5 = 1{,}0$ kΩ ; $R_6 = 5{,}0$ kΩ ; $\Delta P = 10^3$ Pa.
Comment choisir le rapport R_8/R_7 pour obtenir une tension de sortie u_s telle que $|u_s| = 50\,u$?

Partie C : Modulation et démodulation

Dans la transmission de l'information, la modulation d'une tension $v_p(t)$, de pulsation élevée ω_p, par une tension $v_m(t)$ de pulsation ω_m plus faible, est souvent nécessaire. Le signal modulant $v_m(t)$ représente l'information à transmettre, et le signal $v_p(t)$, de pulsation beaucoup plus élevée, se nomme la porteuse. Soit $s(t) = v_p(t).v_m(t)$, le signal résultant (ou modulé). Deux types de modulation sont possibles : modulation de fréquence et modulation d'amplitude.

Données :

rappel de trigonométrie : $\cos a + \cos b = 2 \cos [(a+b)/2] . \cos [(a-b)/2]$;
célérité de la lumière (dans le vide) : $c = 3 \times 10^8$ m . s^{-1}.

I. Présentation de la modulation d'amplitude

Pour illustrer le cas de la modulation d'amplitude, les tensions $v_p(t) = V_p \cos\left(\omega_p t\right)$ et $v_m(t) = V_m [1 + \cos(\omega_m t)]$ sont choisies pour la suite de l'exercice.

1) Les fréquences f_m des signaux à transmettre (émissions radiophoniques par exemple) sont de l'ordre du kHz. Or les antennes émettrices doivent présenter des dimensions du même ordre de grandeur que la longueur d'onde du signal émis. Montrer, grâce à un calcul simple, l'intérêt de la modulation de ces signaux de basse fréquence.

2) Dessiner, sur un même graphe, l'allure des courbes représentatives des tensions $v_p(t)$, $v_m(t)$ et $s(t)$.

3) Le signal $s(t)$ peut s'écrire sous la forme d'une somme de composantes sinusoïdales selon : $s(t) = \sum_i V_i \cos(\omega_i t)$. Identifier les différentes pulsations ω_i qui interviennent dans le spectre de $s(t)$.

4) Quel écart minimal $\Delta\omega_{min}$ doit-il exister entre les pulsations ω_p et ω'_p des porteuses respectives de deux stations radiophoniques, pour que les émissions de même type (même ω_m), en modulation d'amplitude, soient séparées ?

5) Lors de la réception d'un signal modulé en amplitude, un filtrage est nécessaire pour isoler la tension modulée $s(t)$ des autres tensions parasites ou provenant d'autres émetteurs. Quel type de filtre utiliser ? Tracer l'allure de la courbe représentative de la fonction gain $G = f(\omega)$ de ce filtre.

II. Création du signal modulé

Le montage comprend un amplificateur opérationnel idéal, en fonctionnement linéaire, et des résistors de résistances respectives r et R. Soient $u_{e,1}$ et $u_{e,2}$ les deux tensions d'entrée (figure **5**).

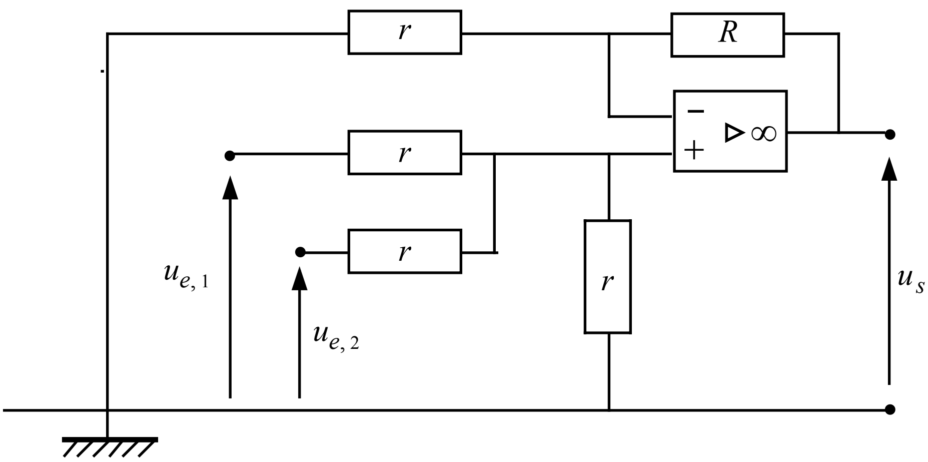

Figure **5**

1) Soit V_{E+} le potentiel de l'entrée positive de l'amplificateur opérationnel. Exprimer, en fonction des tensions $u_{e,1}$ et $u_{e,2}$, le potentiel V_{E+}, mesuré par rapport à la masse du montage.

2) Soit V_{E-} le potentiel de l'entrée négative. Exprimer, en fonction des grandeurs r, R et u_s, le potentiel V_{E-}, mesuré par rapport à la masse du montage.

3) Quelle valeur donner au rapport R/r pour obtenir un montage « additionneur », c'est-à-dire pour que la condition $u_s = u_{e,1} + u_{e,2}$ soit satisfaite ?

4) Le montage « additionneur » $\left(u_s = u_{e,1} + u_{e,2}\right)$ peut être symbolisé de la façon suivante (figure **6**) :

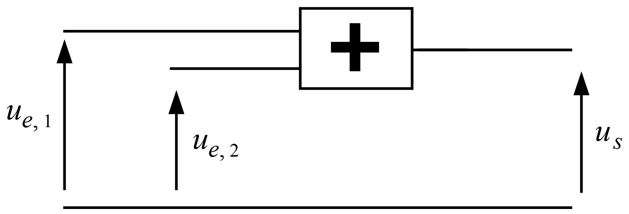

Figure **6**

De la même manière, un montage « multiplieur » ($u_s = k.\ u_{e,1}.\ u_{e,2}$, avec k constante positive) serait symbolisé par (figure **7**) :

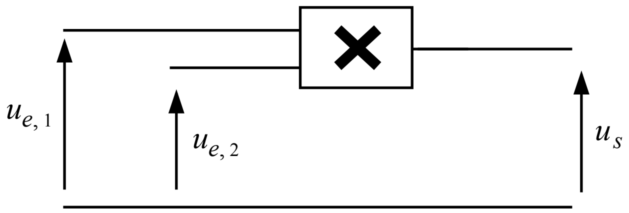

Figure **7**

Afin de créer le signal : $s(t) = A\ [1 + B \cos(\omega_m t)] \cos(\omega_p t)$, avec A et B constantes positives, proposer un montage qui associe les deux dispositifs précédents avec des générateurs de tension, dont les caractéristiques sont à préciser.

III. Démodulation du signal

Dans ce paragraphe, aucune connaissance particulière sur la diode à jonction (dipôle non linéaire), ou sur son fonctionnement, n'est exigée.

Après réception du signal, la tension $s(t)$ peut être démodulée grâce à un montage simple (figure **8**) comprenant une diode à jonction (**D**) supposée idéale, un résistor de résistance R et un condensateur de capacité C.

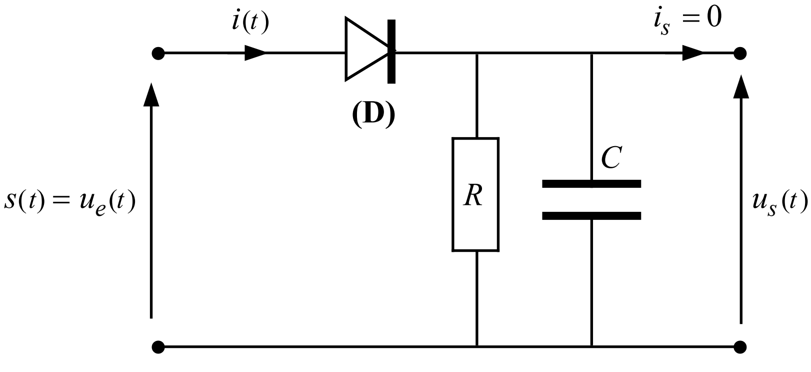

Figure **8**

Le courant de sortie i_s est négligeable. Dans le but de simplifier l'étude du fonctionnement de ce démodulateur, il est admis que la tension d'entrée $s(t)$ est de la forme $u_e(t) = U_m \cos(\omega t)$, tension sinusoïdale, de période T.
La caractéristique $i = f(u)$ de la diode à jonction idéale est donnée, à titre d'information (figure **9**) :

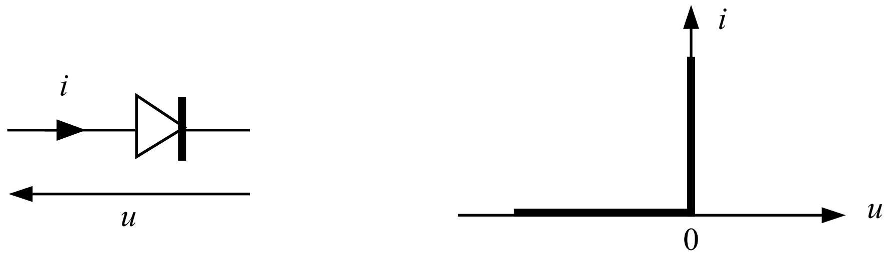

Figure **9**

1) La diode est supposée passante : elle se comporte comme un conducteur de résistance négligeable. L'intensité $i(t)$ du courant est positive, et est de la forme $i(t) = I_m \cos(\omega t + \varphi)$.
- **1.1** Proposer un schéma simplifié du montage représenté à la figure **8**.
- **1.2** Donner la relation entre les tensions $u_e(t)$ et $u_s(t)$.
- **1.3** La tension de sortie s'écrit, en notation complexe, $\underline{u}_s(t) = \underline{Z}\ \underline{i}(t)$. Déterminer l'impédance complexe $\underline{Z}$.
- **1.4** Expliciter, en fonction des données de l'énoncé (c'est-à-dire U_m, R, C et ω), l'expression de l'intensité maximale I_m.
- **1.5** Même question pour l'expression de φ.
- **1.6** En déduire l'intervalle dans lequel les valeurs du déphasage φ peuvent se situer.
- **1.7** À partir de $t = 0$, l'intensité $i(t)$ décroît. À l'instant t_o, ce courant $i(t)$ s'annule une première fois. Exprimer, en fonction de φ et ω, le temps t_o.
- **1.8** En déduire, en fonction de U_m et φ, la valeur U_o de la tension $u_e(t = t_o)$.
- **1.9** Préciser l'état de la diode à une date immédiatement postérieure à t_o.

2) La diode est supposée bloquée : elle se comporte comme un interrupteur ouvert. L'intensité $i(t)$ du courant est nulle, et la tension u aux bornes de la diode est négative.
- **2.1** Proposer un schéma simplifié du montage représenté à la figure **8**.
- **2.2** Le montage est devenu un circuit R-C, en régime libre et transitoire de décharge d'un condensateur. Rappeler l'équation différentielle satisfaite par la tension $u_s(t)$.
- **2.3** Soit $t' = (t - t_o)$. Établir l'expression de la tension $u_s(t')$.
- **2.4** Tracer l'allure de la courbe représentative de la tension $u_s(t')$.
- **2.5** Quelle inégalité doit-il y avoir entre les tensions $u_e(t)$ et $u_s(t)$ pour que la diode reste effectivement bloquée ?

3) Tracer, sur le même graphe, l'allure des courbes représentatives des tensions $u_e(t)$ et $u_s(t)$.

4) Préciser, sur le graphe précédent, les intervalles de temps pour lesquels la diode est passante, et ceux pour lesquels la diode reste bloquée.

5) La tension d'entrée $u_e(t)$ est maintenant le signal modulé :

$$s(t) = v_p(t).v_m(t) = A\,[1 + B \cos(\omega_m t)] \cos(\omega_p t).$$

Comment choisir le produit $R\,.C$ pour, simultanément, éliminer la porteuse et « récupérer » le signal modulant ?

Fin de l'énoncé