SESSION 2007

CONCOURS NATIONAL D'ADMISSION DANS LES GRANDES ECOLES D'INGENIEURS

(Concours National DEUG)

Epreuve commune à 2 options (Mathématiques et Physique)

MECANIQUE - PARTIE II

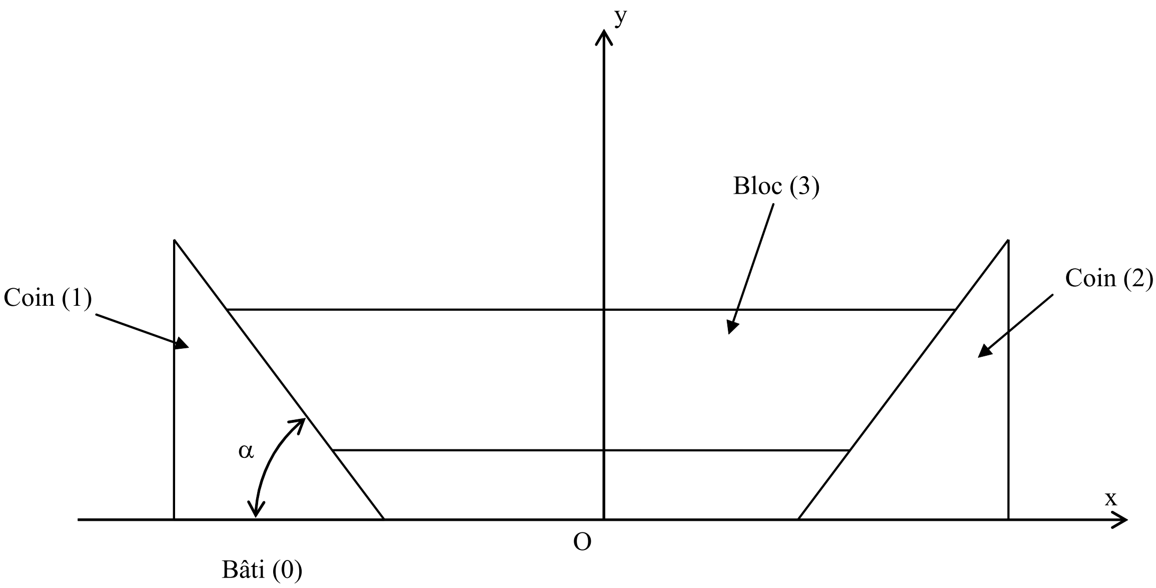
Durée : 2 heures

Les calculatrices sont **autorisées**.

NB : Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction.
Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Avertissement : Tous les résultats numériques sont demandés dans un format scientifique avec une précision au millième (exemple : $1{,}623.10^{-3}$) et en unité S.I., unité qui est à préciser.

Exercice 1 :



Soient 2 coins prismatiques (1) et (2) identiques de section triangulaire et de masse m, qui reposent sur un bâti (0) horizontal. On place sur les 2 coins, un bloc prismatique (3) de masse M.

Le référentiel terrestre $\Re$ est considéré comme galiléen ; il est rapporté au repère $(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$. Le référentiel $\Re$ est associé au bâti (0).

On note f le coefficient de frottement aux contacts :

- entre les coins (1) et (2) et le sol (0).
- entre les coins (1) et (2) et le bloc prismatique (3).

On note $\vec{g} = -g\,\vec{y}$ l'accélération de la pesanteur.

On note $\vec{R}_{0/1}$ l'action du sol (0) sur le coin (1) : $\vec{R}_{0/1} = \vec{N}_{0/1} + \vec{T}_{0/1}$ avec $\vec{N}_{0/1}$ la composante de $\vec{R}_{0/1}$ normale au contact entre (0) et (1) et $\vec{T}_{0/1}$ la composante de $\vec{R}_{0/1}$ tangentielle au contact entre (0) et (1).

On note $\vec{R}_{0/2}$ l'action du sol (0) sur le coin (2) : $\vec{R}_{0/2} = \vec{N}_{0/2} + \vec{T}_{0/2}$ avec $\vec{N}_{0/2}$ la composante de $\vec{R}_{0/2}$ normale au contact entre (0) et (2) et $\vec{T}_{0/2}$ la composante de $\vec{R}_{0/2}$ tangentielle au contact entre (0) et (2).

On note $\vec{R}_{1/3}$ l'action du coin (1) sur le bloc (3) : $\vec{R}_{1/3} = \vec{N}_{1/3} + \vec{T}_{1/3}$ avec $\vec{N}_{1/3}$ la composante de $\vec{R}_{1/3}$ normale au contact entre (3) et (1) et $\vec{T}_{1/3}$ la composante de $\vec{R}_{1/3}$ tangentielle au contact entre (3) et (1).

On suppose que tous les contacts sont à la limite du glissement et qu'il n'y a aucun risque de basculement.

1.1 Etudier l'équilibre du système S = {1+2+3}. En appliquant le principe fondamental de la statique, déterminer une relation entre $N_{0/1}$, m et M.

1.2 Etudier l'équilibre du bloc (3) seul. En appliquant le principe fondamental de la statique, déterminer une relation entre $N_{1/3}$, m, M, f et α.

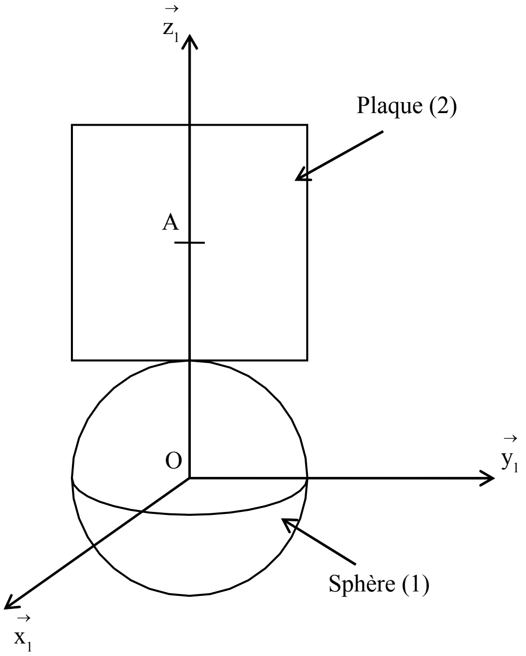
1.3 Etudier l'équilibre du coin (1) seul. En appliquant le principe fondamental de la statique, déterminer une relation entre $N_{0/1}$, $N_{1/3}$, f et α.

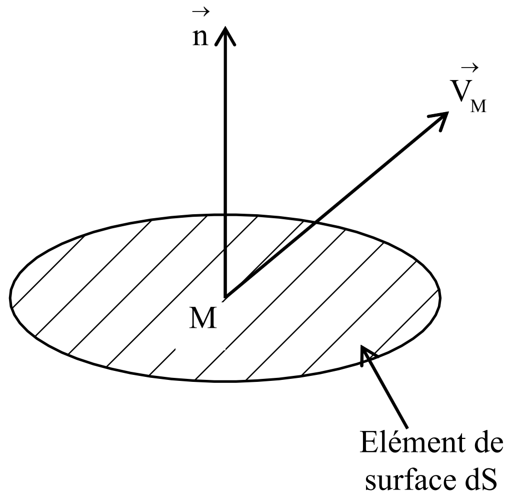
1.4 En vous servant des 3 relations trouvées précédemment, déterminer une équation du second degré liant f, M, m et α de la forme $f^2 + af + b = 0$. Expliciter les coefficients a et b.

On s'intéresse maintenant au cas où M = 4m et $\alpha = \frac{\pi}{4}$.

1.5 Déterminer la valeur limite de f pour que le système reste en équilibre.

Exercice 2 :





Une sphère (1) homogène de masse m et de rayon R est mobile sans frottement autour de son centre O fixe.

Le référentiel terrestre $\Re_0$ est considéré comme galiléen ; il est rapporté au repère $(O,\vec{x}_0,\vec{y}_0,\vec{z}_0)$.

Le référentiel $\Re_1$ est rapporté au repère $(O,\vec{x}_1,\vec{y}_1,\vec{z}_1)$. Le référentiel $\Re_1$ est lié à la sphère (1).

Une plaque (2) de masse négligeable ayant la forme d'un carré de coté 2R est soudée à la sphère (1) de manière à rester dans le plan $O\vec{y}_1\vec{z}_1$, l'axe $O\vec{z}_1$ étant l'axe de symétrie du carré et le centre A du carré étant situé à une distance 2R du point O.

On note $\vec{\Omega}(S/\Re_0)$ le vecteur rotation du solide (S) ainsi constitué. On pose $\vec{\Omega}(S/\Re_0)=\dot{\alpha}\,\vec{x}_1+\dot{\beta}\,\vec{y}_1+\dot{\varphi}\,\vec{z}_1$. Les conditions initiales du mouvement sont définies par la donnée de $\dot{\alpha}_0$, $\dot{\beta}_0$, $\dot{\varphi}_0$ valeurs initiales de $\dot{\alpha}$, $\dot{\beta}$ et $\dot{\varphi}$.

On considère un point M de la plaque (2) tel que $\vec{OM}=y\,\vec{y}_1+z\,\vec{z}_1$.

La loi de résistance de l'air est la suivante : un élément de surface dS centré sur le point M et de normale $\vec{n}$ subit de la part de l'air une force $\vec{dF}=-k.(\vec{V}_M\bullet\vec{n}).dS.\vec{n}$ avec $\vec{V}_M$ vitesse du point M appartenant à (S) par rapport à $\Re_0$.

2.1 Déterminer $\vec{V}_M$ la vitesse du point M.

2.2 Déterminer la force $\vec{dF}$ exercée par l'air sur l'élément de surface dS au point M.

2.3 En déduire le moment $\vec{dM}_O$ de la force $\vec{dF}$ au point O.

2.4 Déterminer $\vec{M}_O$ le moment au point O de l'ensemble des forces exercées par l'air sur la plaque (2) en fonction de k, R, $\dot{\alpha}$, $\dot{\beta}$ et $\dot{\varphi}$.

2.5 Déterminer le moment cinétique $\vec{L}_O(S/\Re_0)$ du solide (S) par rapport à $\Re$ au point O en fonction de m, R, $\dot{\alpha}$, $\dot{\beta}$ et $\dot{\varphi}$.

2.6 En appliquant le théorème du moment dynamique au solide (S) au point O, déterminer les lois d'évolution temporelle de $\dot{\alpha}$, $\dot{\beta}$ et $\dot{\varphi}$.

2.7 Quelle est la rotation qui disparaît en premier ? Quelle est celle qui persiste le plus longtemps ?

Fin de l'énoncé