

CONCOURS NATIONAL DEUG

---

Epreuve spécifique concours Physique

PHYSIQUE

PARTIE II

Durée : 2 heures

---

NB : Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction.

Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

---

*Les calculatrices sont **autorisées**.*

*L'usage de tout ouvrage de référence et de tout document est **interdit**.*

---

**De très nombreuses parties sont indépendantes. Il est conseillé aux candidats de prendre connaissance rapidement de la totalité du texte du sujet.**

**Les candidats doivent respecter les notations de l'énoncé et préciser, dans chaque cas, la numérotation de la question traitée.**

# CIRCUITS ÉLECTRIQUES : ÉTUDE D'UN CÂBLE COAXIAL

Les parties **A** et **B** sont indépendantes

## Partie A : câble coaxial en régime continu

Un câble est constitué de deux armatures métalliques coaxiales (axe  $Ox$  commun), séparées par un matériau isolant imparfait (figure 1) :

- l'armature interne (**A**<sub>1</sub>), ou âme, est un conducteur cylindrique (plein), de conductivité  $\sigma$  et de rayon  $r_1$  ;
- l'armature externe (**A**<sub>2</sub>) est une enveloppe cylindrique pleine, conductrice, de conductivité  $\sigma$  et comprise entre deux surfaces cylindriques coaxiales, de rayons  $r_2$  et  $r_3$  (avec  $r_2 < r_3$ ) ;
- la gaine d'isolant imparfait (**G**), de conductivité  $\sigma_g$ , compris entre les surfaces cylindriques de rayons  $r_1$  et  $r_2$ , sépare l'âme de l'armature externe.

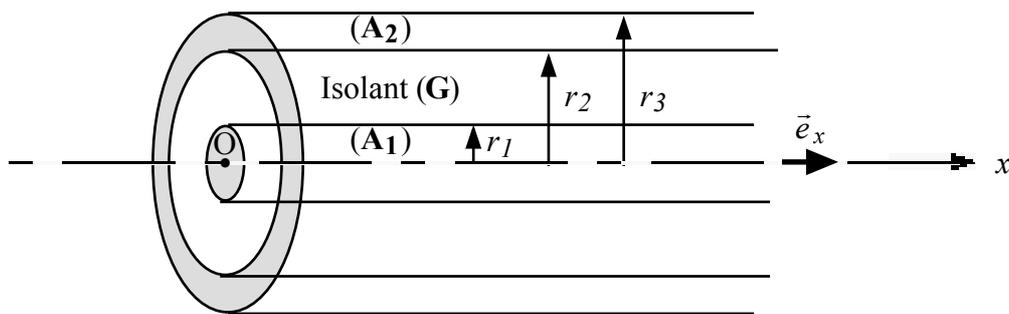


Figure 1

### I. Loi d'Ohm locale

Les charges mobiles (électrons de charge  $-e$ ) d'un conducteur métallique cylindrique, d'axe  $Ox$  orienté par le vecteur unitaire  $\vec{e}_x$ , sont animées d'une vitesse  $\vec{v}$ , sous l'action d'un champ électrique uniforme  $\vec{E} = E\vec{e}_x$  appliqué à l'instant initial  $t=0$  (avec  $\vec{v}(t=0) = \vec{0}$ ). Les électrons sont en outre soumis à une force de freinage  $\vec{f} = -\frac{m}{\tau}\vec{v}$ , avec  $\tau$  constante physique positive et  $m$  la masse de l'électron. L'action du champ de pesanteur est négligée.

- 1) Quelles peuvent être les causes de l'existence de la force de freinage ?
- 2) La vitesse  $\vec{v}$  est colinéaire au vecteur  $\vec{e}_x$ . En appliquant la relation fondamentale de la dynamique, exprimer l'équation différentielle qui relie le vecteur  $\vec{v}$  au temps  $t$ .
- 3) En déduire l'expression vectorielle du vecteur vitesse  $\vec{v}(t)$ .
- 4) Montrer que la vitesse  $\vec{v}(t)$  de l'électron tend vers une valeur limite  $\vec{v}_{\text{lim}}$  qui dépend des grandeurs  $e$ ,  $m$ ,  $\tau$  et  $\vec{E}$ .

5) *Application numérique.*

$$e = 1,6 \times 10^{-19} \text{ C} ; m = 9,1 \times 10^{-31} \text{ kg} ; \tau = 2,5 \times 10^{-14} \text{ s} ; E = 0,5 \text{ V m}^{-1}.$$

5.1. Calculer  $v_{\text{lim}}$ .

5.2. Comparer  $v(t = 5\tau)$  et  $v_{\text{lim}}$ . Conclure sur la durée d'établissement du régime permanent.

6) Le régime permanent est maintenant établi : l'égalité  $\vec{v} = \vec{v}_{\text{lim}} = \mu \vec{E}$  est vérifiée (avec  $\mu$  mobilité algébrique constante des électrons).  $\vec{j}$  est le vecteur densité de courant électrique, et  $N^*$  est la densité particulaire des électrons (nombre d'électrons par unité de volume) dans le métal.

6.1. En rappelant la relation qui existe entre  $\vec{j}$ ,  $N^*$ ,  $e$  et  $\vec{v}$ , montrer que le conducteur métallique satisfait à la loi d'Ohm locale  $\vec{j} = \sigma \vec{E}$ , avec  $\sigma$  conductivité électrique du milieu.

6.2. *Application numérique.*  $N^* = 6,0 \times 10^{28} \text{ m}^{-3}$ .

Calculer la valeur de la conductivité  $\sigma$ .

## II. Résistance d'un conducteur cylindrique d'axe Ox

Un conducteur cylindrique d'axe  $Ox$ , de section constante  $S$ , est parcouru par un courant d'intensité  $I$  constante, et obéit à la loi d'Ohm locale. Le régime est permanent : les vecteurs  $\vec{j}$  et  $\vec{E}$  sont uniformes, et le phénomène de transport est unidirectionnel.

La section (disque) d'abscisse  $x = 0$  est maintenue au potentiel  $V_0$  constant. Soit  $V(x)$ , le potentiel de la section d'abscisse  $x$  (figure 2).

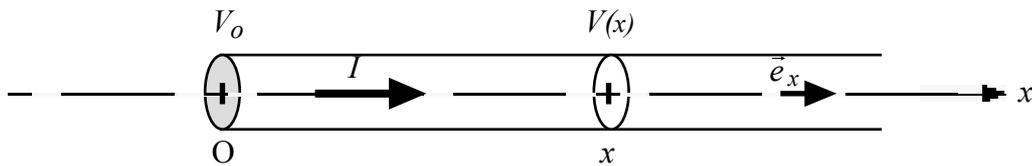


Figure 2

- 1) Rappeler la relation entre  $I$  et  $\vec{j}$ .
- 2) Le champ électrique dérive du potentiel  $V$  (relation  $\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}} V$ ) : écrire l'équation qui lie le vecteur densité de courant  $\vec{j}$  à la dérivée  $\frac{dV(x)}{dx}$ .
- 3) Exprimer, en fonction des grandeurs  $V_0$ ,  $I$ ,  $\sigma$ ,  $S$  et  $x$ , le potentiel  $V(x)$  du conducteur, dans le plan d'abscisse  $x$ .
- 4) En déduire la résistance  $R(x)$  du conducteur cylindrique compris entre les sections d'abscisses  $x = 0$  et  $x$ .
- 5) Les propriétés et résultats précédents sont applicables aux armatures ( $A_1$ ) et ( $A_2$ ) du câble coaxial.
  - 5.1. Exprimer, en fonction de  $\sigma$  et  $r_1$ , la résistance linéique  $\lambda_1$  du conducteur ( $A_1$ ) (résistance par unité de longueur).
  - 5.2. Déterminer, en fonction de  $\sigma$ ,  $r_2$  et  $r_3$ , la résistance linéique  $\lambda_2$  du conducteur ( $A_2$ ).

### III. Résistance de la gaine d'isolant imparfait comprise entre les deux armatures

Les armatures ( $A_1$ ) et ( $A_2$ ) sont considérées, **uniquement dans ce paragraphe (§. A.III)**, comme des conducteurs parfaits portés aux potentiels respectifs  $V_1$  et  $V_2$  (avec  $V_1 > V_2$ ) uniformes et constants.

La gaine « d'isolant » homogène ( $G$ ), comprise entre les armatures, se comporte comme un conducteur ohmique de faible conductivité  $\sigma_g$ . Il est parcouru par un courant électrique de fuite  $I_f$ . Le phénomène est à symétrie cylindrique et les effets de bord sont négligés : les lignes de courant dans « l'isolant » sont radiales (donc orthogonales à l'axe  $Ox$ ) sur toute la longueur  $\ell$  du câble et le vecteur densité de courant ne dépend que du rayon  $r$  (figure 3).

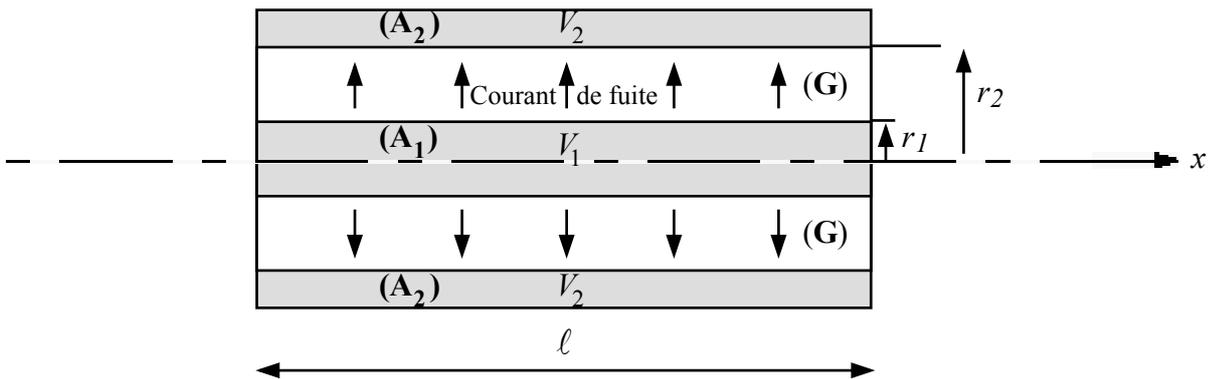


Figure 3

- 1) Le phénomène de transport étant unidimensionnel, écrire l'équation qui lie la densité de courant  $j(r)$  à la dérivée  $\frac{dV(r)}{dr}$ .
- 2) En choisissant une surface cylindrique d'axe  $Ox$ , de longueur  $\ell$  et de rayon  $r$  ( $r_1 < r < r_2$ ), relier l'intensité  $I_f$  du courant de fuite à la densité de courant  $j(r)$ .
- 3) Sachant que la différence de potentiel  $V_1 - V_2$  s'écrit sous la forme  $V_1 - V_2 = RI_f$ , déterminer, en fonction des grandeurs  $\sigma_g$ ,  $\ell$ ,  $r_1$  et  $r_2$ , la résistance  $R$  de la gaine d'isolant, de longueur  $\ell$ .

### IV. Étude du câble coaxial

Les armatures ont à nouveau la conductivité  $\sigma$ , comme décrit au § A.II.5.

Dans le plan d'abscisse  $x=0$ , la section de l'armature interne ( $A_1$ ) (disque de rayon  $r_1$ ) est maintenue au potentiel  $V_1(0) = V_1$  constant et la section de l'armature externe ( $A_2$ ) (couronne circulaire) est maintenue au potentiel  $V_2(0) = V_2$  constant, avec  $V_1 > V_2$ .

Dans le plan d'abscisse  $x$ , la section de l'armature ( $A_1$ ) se trouve au potentiel  $V_1(x)$ , et la section de l'armature ( $A_2$ ) présente le potentiel  $V_2(x)$ . Par ailleurs, toujours dans le plan d'abscisse  $x$ , ces sections sont traversées par des courants (lignes de courants parallèles à  $Ox$ ), de même intensité  $i(x)$ , mais de sens opposés.

Soit  $i(0) = i_0$ , l'intensité constante du courant dans ( $A_1$ ) et ( $A_2$ ), à l'abscisse  $x = 0$ .

La tranche élémentaire de câble coaxial, comprise entre les plans d'abscisse  $x$  et  $x+dx$ , est partiellement symbolisée par la figure 4.

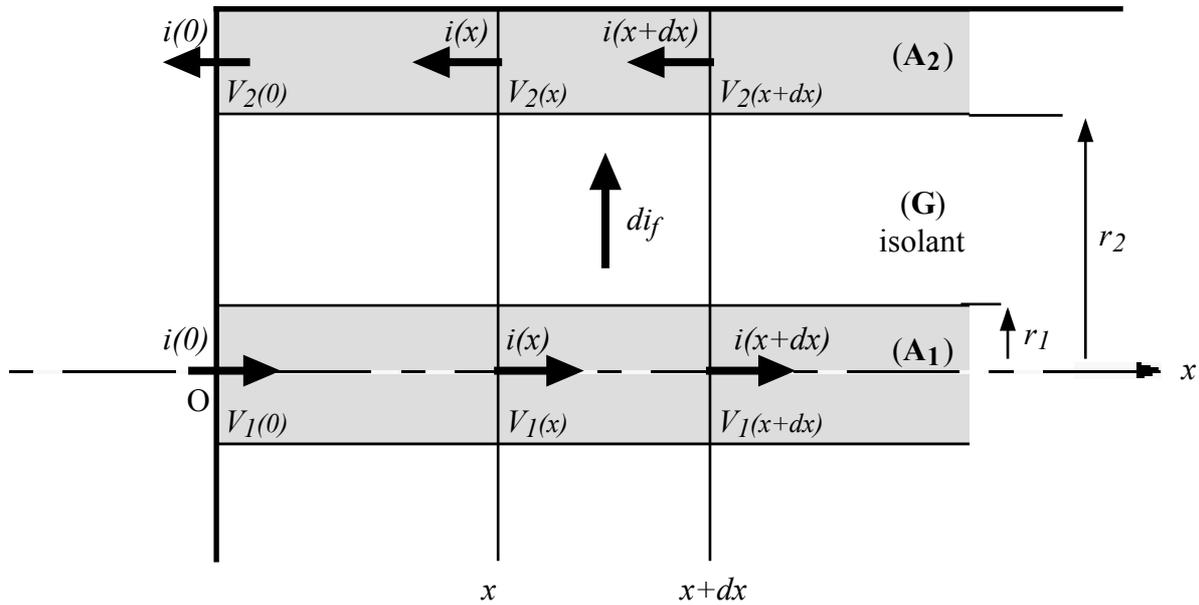


Figure 4

- 1) Exprimer, en fonction de  $i(x)$  et  $i(x+dx)$ , le courant de fuite élémentaire  $di_f$ , dans la tranche d'épaisseur  $dx$  (figure 4).
- 2) Par application de la loi d'Ohm, dans la tranche élémentaire d'épaisseur  $dx$ , établir :
  - 2.1. une équation différentielle liant  $V_1(x)$  et  $i(x)$ , pour l'armature (A1) de résistance linéique  $\lambda_1$  ;
  - 2.2. une équation différentielle liant  $V_2(x)$  et  $i(x)$ , pour l'armature (A2) de résistance linéique  $\lambda_2$  ;
  - 2.3. une équation différentielle liant  $V_1(x)$ ,  $V_2(x)$  et  $i(x)$ , pour « l'isolant » (G).
- 3) On pose  $\lambda_g = \frac{1}{2\pi\sigma_g} \ln \frac{r_2}{r_1}$ . Montrer qu'en combinant les trois équations différentielles précédentes, on obtient une équation différentielle du second ordre en  $i(x)$ , de la forme :

$$\frac{d^2 i(x)}{dx^2} - \omega^2 i(x) = 0.$$

Exprimer  $\omega$  en fonction de  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$  et  $\lambda_g$ .

- 4) Le câble est supposé de longueur infinie. L'intégration de l'équation différentielle précédente conduit à l'expression :

$$i(x) = I_1 e^{-\omega x} + I_2 e^{+\omega x}, \text{ avec } I_1 \text{ et } I_2 \text{ constantes d'intégration.}$$

- 4.1. Déterminer les constantes  $I_1$  et  $I_2$ .
- 4.2. Dessiner l'allure de la courbe représentative de la fonction  $i(x)$ .

5) La résistance de ce câble coaxial, de longueur infinie, est définie par le rapport

$$R_c = \frac{V_1(0) - V_2(0)}{i(0)} .$$

5.1. Établir les expressions de  $V_1(x)$  et  $V_2(x)$  .

5.2. Dessiner l'allure de la courbe représentative de la fonction  $v(x) = [V_1(x) - V_2(x)]$  .

5.3. Déterminer, en fonction des grandeurs  $\lambda_1, \lambda_2$  et  $\lambda_g$ , la résistance  $R_c$  .

### V. Modélisation simple du câble

Le câble peut être modélisé par un circuit  $A_1A_2$ , constitué d'une chaîne de  $n$  modules identiques comportant chacun trois résistors (résistances respectives  $R/2$ ,  $2R$  et  $R/2$ ) (figures 5 et 6).

Un dipôle résistor  $X_1X_2$ , de résistance  $2R$ , est branché en parallèle à l'extrémité de la chaîne.

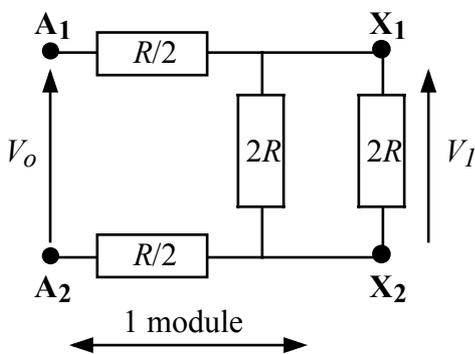


Figure 5

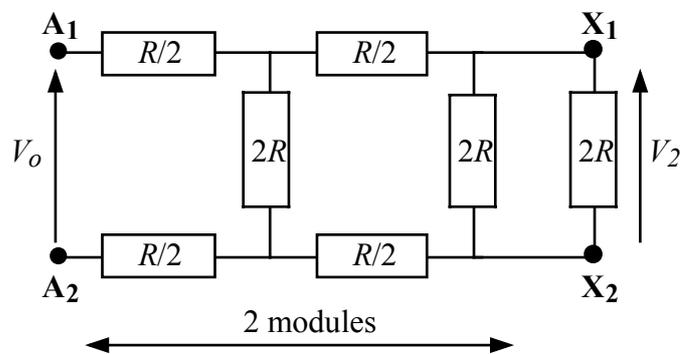


Figure 6

1) Le dipôle  $A_1A_2$  est équivalent à un résistor.

1.1. Exprimer, en fonction de  $R$ , la résistance équivalente  $R_1$ , dans le cas d'une chaîne ne comportant qu'un seul module (figure 5).

1.2. Même question pour la résistance équivalente  $R_2$ , dans le cas d'une chaîne à  $n = 2$  modules (figure 6).

1.3. En déduire, sur le même principe, la résistance équivalente  $R_n$  d'une chaîne à  $n$  modules.

2) Le dipôle  $A_1A_2$  est alimenté par un générateur de tension constante  $V_o = V_{A1} - V_{A2}$  .

2.1. Déterminer, en fonction de  $V_o$  et  $R$ , la tension  $V_1 = V_{X1} - V_{X2}$ , aux bornes du résistor  $X_1X_2$ , dans le cas d'une chaîne ne comportant qu'un seul module (figure 5).

2.2. Même question pour la tension  $V_2$ , dans le cas d'une chaîne à  $n = 2$  modules (figure 6).

2.3. En déduire, sur le même principe, la tension  $V_n$  dans le cas d'une chaîne à  $n$  modules.

2.4. En déduire la valeur  $V_\infty$  pour une chaîne de longueur infinie ( $n \rightarrow \infty$ ).

## Partie B : câble coaxial en régime sinusoïdal

On se place dans le cadre de l'approximation des régimes quasi stationnaires (A.R.Q.S.). Le câble est alimenté par une source de tension alternative sinusoïdale (signal)  $v(0, t)$ , en  $x = 0$ .

L'âme ( $A_1$ ) et l'armature externe ( $A_2$ ), qui présentent les résistances linéiques respectives  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  ( $\Omega \text{ m}^{-1}$ ) et les inductances propres linéiques respectives  $A_1$  et  $A_2$  ( $\text{H m}^{-1}$ ), constituent un condensateur de capacité linéique  $\Gamma$  ( $\text{F m}^{-1}$ ). L'isolant imparfait ( $G$ ) présente la conductivité radiale linéique  $\frac{1}{\lambda_g}$  ( $\Omega^{-1} \text{ m}^{-1}$  ou  $\text{S m}^{-1}$ ).

À l'instant  $t$  et à l'abscisse  $x$ ,  $i = i(x, t)$  est l'intensité du courant qui circule dans les armatures ( $A_1$ ) et ( $A_2$ ), et  $v = v(x, t)$  est la différence de potentiel existant entre ces dernières.

Le schéma électrique équivalent à une tranche élémentaire de ligne coaxiale, d'épaisseur  $dx$ , est représenté sur la figure 7.

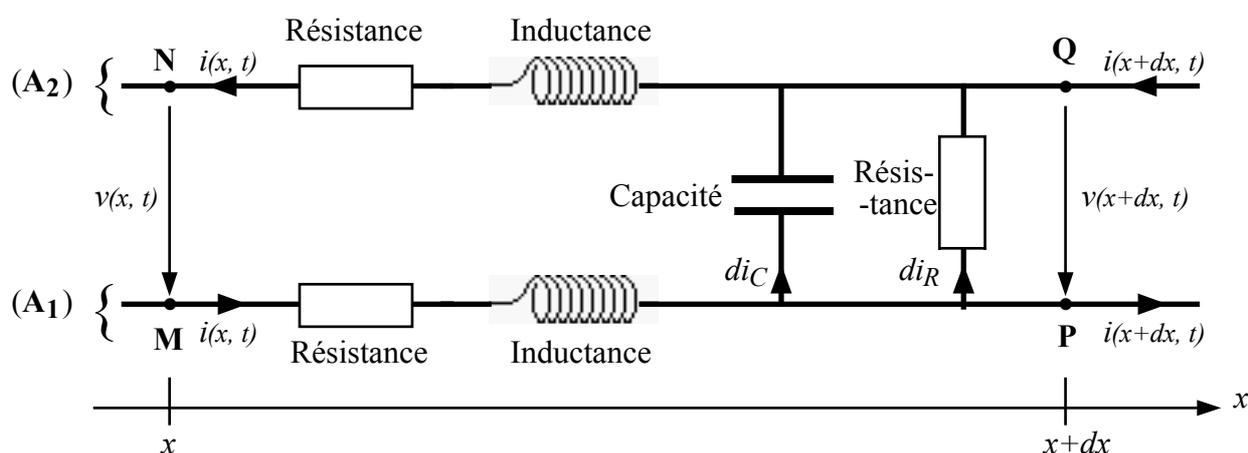


Figure 7

Le cas échéant, les développements seront limités aux termes du premier ordre.

- 1) Recopier la figure 7. La compléter en attribuant à chacun des dipôles, la valeur de sa grandeur caractéristique, en fonction des données de l'énoncé ( $\lambda_1, \lambda_2, A_1, A_2, \Gamma, \lambda_g$  et  $dx$ ).
- 2) Soient  $x$  et  $x+dx$ , les abscisses respectives des points M et P de l'armature ( $A_1$ ). Relier la tension  $u_1(x, t) = V_P - V_M$  aux grandeurs  $i$  et  $\frac{\partial i}{\partial t}$ .
- 3) Même question pour la tension  $u_2(x, t) = V_Q - V_N$ , les points N et Q de l'armature ( $A_2$ ) ayant pour abscisses respectives  $x$  et  $x+dx$ .
- 4) Après avoir explicité la différence de tension  $v(x+dx, t) - v(x, t)$  (loi des mailles), établir la relation, notée (1), entre les grandeurs  $\frac{\partial v}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial i}{\partial t}$  et  $i$ .
- 5) Dans la tranche élémentaire, la gaine ( $G$ ) est caractérisée par une résistance parcourue par le courant  $di_R$  et une capacité parcourue par le courant  $di_C$  (figure 7). Relier l'intensité élémentaire  $di_R$  à  $v$ , puis l'intensité élémentaire  $di_C$  à  $\frac{\partial v}{\partial t}$ .

- 6) Après avoir écrit la relation entre les courants  $i(x+dx, t)$ ,  $i(x, t)$ ,  $di_C$  et  $di_R$  (loi des nœuds), établir la relation, notée (2), entre les grandeurs  $\frac{\partial i}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial v}{\partial t}$  et  $v$ .
- 7) Dériver l'équation (1) par rapport à l'abscisse  $x$ , et l'équation (2) par rapport au temps  $t$ . En déduire, après combinaison des relations obtenues, une équation différentielle (3) du second ordre en  $v$ , appelée équation des télégraphistes. Cette équation constitue l'équation de propagation d'une onde de tension.
- 8) À l'entrée de la ligne supposée relativement longue, en  $x=0$ , est établie, entre l'âme et l'armature externe, une tension sinusoïdale dont l'expression complexe est :  $\underline{v}(0, t) = V_o e^{j\omega t}$ . En régime forcé, la tension  $v(x, t)$  entre les armatures, à l'abscisse  $x$ , est de la forme générale, en notation complexe :

$$\underline{v}(x, t) = V_1 e^{-\alpha x} e^{j(\omega t - \beta x)} + V_2 e^{\alpha x} e^{j(\omega t + \beta x)},$$

avec  $\alpha$  constante positive, et  $V_1$  et  $V_2$  constantes réelles d'intégration.

- 8.1. Simplifier l'expression de  $\underline{v}(x, t)$ , en tenant compte des réalités physiques.
- 8.2. Quelles sont les principales caractéristiques de cette onde de tension ?

**Fin de l'énoncé**