SESSION 2004

CONCOURS NATIONAL DEUG

Epreuve spécifique concours Physique

MECANIQUE

PARTIE II

Durée : 2 heures

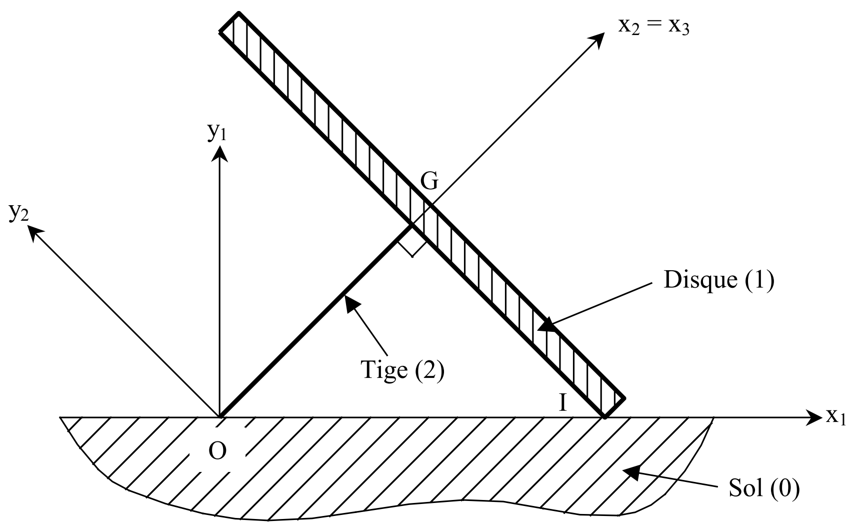
---

*Les calculatrices sont **autorisées**.*

NB : Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction.
Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Avertissement : Tous les résultats numériques sont demandés dans un format scientifique avec une précision au millième (exemple : $1{,}623.10^{-3}$) et en unité S.I., unité qui est à préciser.

Exercice 1 : Glissement et basculement d'un solide



On considère un solide (S) constitué :

- d'un disque (1) homogène, de centre de gravité G, de rayon a, de masse M et d'épaisseur négligeable devant les autres dimensions.
- d'une tige (2) de longueur a, de masse négligeable, soudée en G au disque (1).

Le solide (S) roule sans glisser au point I sur le sol horizontal (0) de telle manière que l'extrémité de la tige (2) coïncide en permanence avec un point O fixe du sol (0).

Tournez la page S.V.P.

Le référentiel terrestre $\Re_0$ est considéré comme galiléen ; il est rapporté au repère $(O,\vec{x}_0,\vec{y}_0,\vec{z}_0)$. Le référentiel $\Re_0$ est associé au sol (0).

On note $\Re_1$ le référentiel rapporté au repère orthonormé direct $(O,\vec{x}_1,\vec{y}_1,\vec{z}_1)$ tel que $\vec{y}_1 = \vec{y}_0$. Le repère $(O,\vec{x}_1,\vec{y}_1,\vec{z}_1)$, se déduit à chaque instant de $(O,\vec{x}_0,\vec{y}_0,\vec{z}_0)$ par une rotation d'angle θ autour de l'axe $O\vec{y}_0$. L'axe $O\vec{x}_1$ est toujours colinéaire à l'axe $\vec{OI}$.

On note $\Re_2$ le référentiel rapporté au repère orthonormé direct $(O,\vec{x}_2,\vec{y}_2,\vec{z}_2)$ tel que $\vec{z}_2 = \vec{z}_1$. Le repère $(O,\vec{x}_2,\vec{y}_2,\vec{z}_2)$ se déduit à chaque instant de $(O,\vec{x}_1,\vec{y}_1,\vec{z}_1)$ par une rotation d'angle $\alpha = 45°$ autour de l'axe $O\vec{z}_1$.

On note $\Re_3$ le référentiel rapporté au repère orthonormé direct $(O,\vec{x}_3,\vec{y}_3,\vec{z}_3)$ tel que $\vec{x}_3=\vec{x}_2$. Le repère $(O,\vec{x}_3,\vec{y}_3,\vec{z}_3)$, rigidement lié au solide (S), se déduit à chaque instant de $(O,\vec{x}_2,\vec{y}_2,\vec{z}_2)$ par une rotation d'angle φ autour de l'axe $O\vec{x}_2$.

On note f le coefficient de frottement entre le disque (1) et le sol (0) d'une part, et entre la tige (2) et le sol (0) d'autre part.

On note $\vec{g} = -g\,\vec{y}_0$ l'accélération de la pesanteur et $\dot{\theta}$ la dérivée par rapport au temps de l'angle θ.

On note $\vec{R}_O=X_O\vec{x}_1+Y_O\vec{y}_1+Z_O\vec{z}_1$ l'action de contact du sol (0) sur le solide (S) au point O.

On note $\vec{R}_I=X_I\vec{x}_1+Y_I\vec{y}_1+Z_I\vec{z}_1$ l'action de contact du sol (0) sur le solide (S) au point I.

<u>Etude cinématique</u> :

1.1 Ecrire la condition de non glissement au point I. En déduire une relation simple liant $\dot{\theta}$ et $\dot{\varphi}$.

1.2 Déterminer l'axe instantané de rotation du mouvement du solide (S) par rapport au sol (0).

1.3 Exprimer dans $\Re_1$ la vitesse angulaire $\vec{\Omega}(S/\Re_0)$ du solide (S) par rapport à $\Re_0$ en fonction de $\dot{\theta}$.

1.4 Déterminer la vitesse $\vec{V}(G \in S/\Re_0)$ du point G lié au solide (S) par rapport à $\Re_0$ et l'exprimer dans $\Re_1$ en fonction de a et $\dot{\theta}$.

1.5 Déterminer l'accélération $\vec{\Gamma}(G \in S/\Re_0)$ du point G lié au solide (S) par rapport à $\Re_0$ et l'exprimer dans $\Re_1$ en fonction de a, θ et de ses dérivées successives par rapport au temps.

<u>Etude cinétique</u> :

1.6 Déterminer l'opérateur d'inertie $[J]_G$ du solide (S) au point G dans le repère $(G,\vec{x}_2,\vec{y}_2,\vec{z}_2)$.

1.7 Déterminer I_{Gx} le moment d'inertie du solide (S) par rapport à l'axe $G\vec{x}_1$.

1.8 En déduire I_{Ox} le moment d'inertie du solide (S) par rapport à l'axe $O\vec{x}_1$.

1.9 Exprimer l'énergie cinétique $T(S/\Re_0)$ du solide (S) dans son mouvement par rapport à $\Re_0$.

1.10 Déterminer la puissance P_{ext} des efforts extérieurs appliqués au solide (S).

1.11 Enoncer clairement le théorème de l'énergie cinétique puis l'appliquer au solide (S). En déduire que $\dot{\theta}$ reste constant au cours du temps.

Etude dynamique :

1.12 Appliquer le théorème de la résultante dynamique au solide (S). On effectuera une projection de ce théorème dans $\Re_1$.

1.13 Exprimer dans $\Re_2$ le moment cinétique $\vec{L}_O(S/\Re_0)$ du solide (S) par rapport à $\Re_0$ au point O.

1.14 Exprimer le moment dynamique $\left(\dfrac{d\vec{L}_O(S/\Re_0)}{dt}\right)_{\Re_0}$ du solide (S) par rapport à $\Re_0$ au point O et l'exprimer dans $\Re_1$.

1.15 Déterminer dans $\Re_1$ le moment $\vec{M}_O(P)$ au point O de l'action de la pesanteur $\vec{P}$.

1.16 Déterminer dans $\Re_1$ le moment $\vec{M}_O(R_I)$ au point O de l'action de contact $\vec{R}_I$.

1.17 Appliquer le théorème du moment cinétique au solide (S) au point O. On effectuera une projection de ce théorème dans $\Re_1$.

1.18 En déduire que les actions de contact $\vec{R}_O$ et $\vec{R}_I$ ne possèdent pas de composantes suivant l'axe $O\vec{z}_1$.

1.19 Déterminer la valeur $\dot{\theta}_1$ de $\dot{\theta}$ pour laquelle le solide (S) se met à glisser sur le sol (0).

1.20 En déduire les expressions de Y_O et Y_I en fonction de M, g, a et $\dot{\theta}$.

1.21 En déduire la valeur $\dot{\theta}_2$ de $\dot{\theta}$ pour laquelle le solide (S) se met à basculer autour du point I.

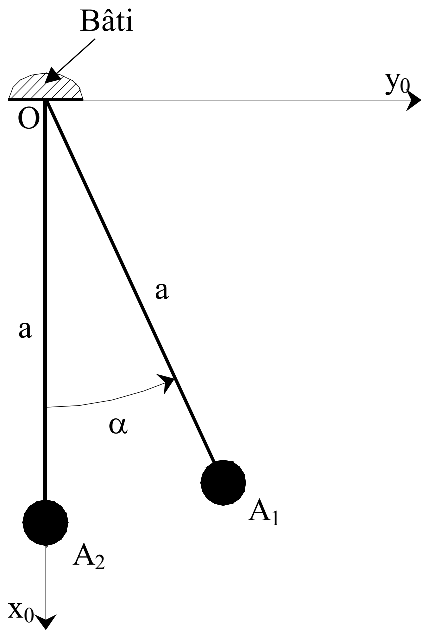
1.22 Que se passe-t-il si l'on fait croître très lentement $\dot{\theta}$? Discuter suivant la valeur du coefficient de frottement f.

Exercice 2 : Collision de deux pendules

Deux pendules simples, de même longueur a, sont fixés au bâti au même point O. Ils sont constitués de 2 billes A_1 et A_2 de masses m_1 et m_2, supposées ponctuelles. Au départ, les billes A_1 et A_2 sont en équilibre. On écarte la bille A_1 d'un angle α et on l'abandonne sans vitesse initiale.
On suppose que les collisions sont parfaitement élastiques.

Le référentiel terrestre $\Re_0$ est considéré comme galiléen ; il est rapporté au repère $(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$.
Le référentiel $\Re_0$ est associé au bâti.

On note $\vec{g} = g\,\vec{x}_0$ l'accélération de la pesanteur.



2.1 Déterminer la vitesse v_1 de la bille A_1 juste avant le choc en fonction de a, α et g.

2.2 Déterminer les vitesses $v_1^{'}$ et $v_2^{'}$ des billes A_1 et A_2 juste après le choc en fonction g, a, α et du rapport des masses $x = \dfrac{m_2}{m_1}$.

2.3 Déterminer les angles d'écart maximum α_1 et α_2 de A_1 et A_2 après le choc en fonction de α et x.

2.4 Pour quelle valeur de x, les deux pendules remontent-ils en sens contraire du même angle ?

2.5 Application numérique : Déterminer la valeur de cet angle pour $\alpha = 60°$.

Fin de l'énoncé