SESSION 2003

CONCOURS NATIONAL DEUG

Epreuve commune concours Physique et concours Chimie

MECANIQUE

PARTIE I

Durée : 2 heures

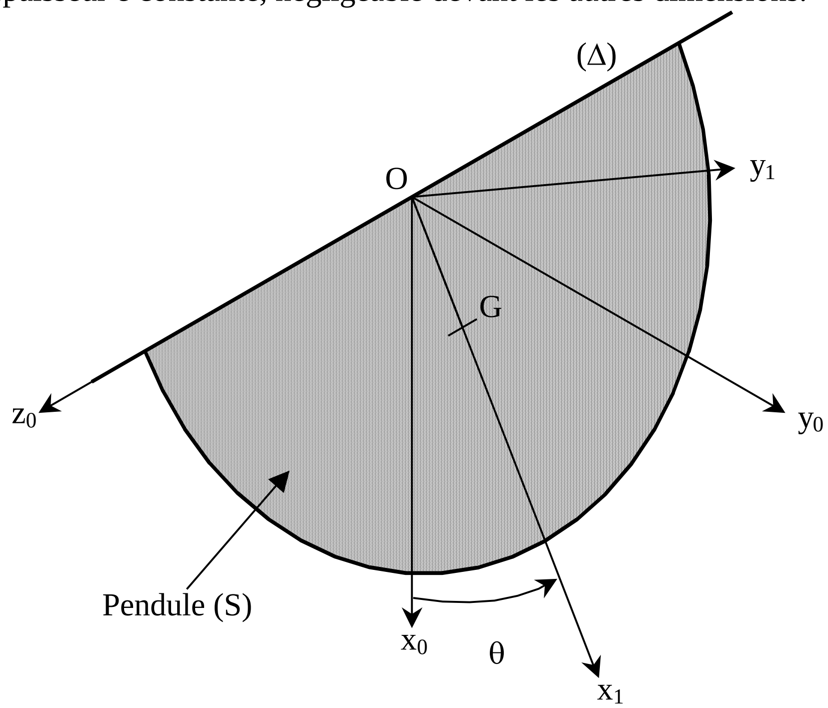
Les calculatrices sont **autorisées**.

NB : Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction.
Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Avertissement : Tous les résultats numériques sont demandés dans un format scientifique avec une précision au millième (exemple : $1{,}623.10^{-3}$) et en unité S.I., unité qui est à préciser.

Exercice 1 : Etude d'un pendule

Un pendule (S) est constitué d'une plaque en forme de demi-disque de rayon r, de masse volumique μ, d'épaisseur e constante, négligeable devant les autres dimensions.



Le référentiel terrestre $\Re_0$ est considéré comme galiléen ; il est rapporté au repère $(O,\vec{x}_0,\vec{y}_0,\vec{z}_0)$. Le référentiel $\Re_0$ est associé à l'axe (Δ).

On note $\Re_1$ le référentiel rapporté au repère orthonormé direct $(O,\vec{x}_1,\vec{y}_1,\vec{z}_1)$ tel que $\vec{z}_1 = \vec{z}_0$. Le repère $(O,\vec{x}_1,\vec{y}_1,\vec{z}_1)$, rigidement lié au pendule (S), se déduit à chaque instant de $(O,\vec{x}_0,\vec{y}_0,\vec{z}_0)$ par une rotation d'angle θ autour de l'axe $O\vec{z}_0$.

Le pendule (S) est mobile sans frottement autour de l'axe (Δ). A l'instant t = 0, on écarte le pendule (S) de sa position d'équilibre stable d'un angle θ_0 puis on le lâche sans vitesse initiale.

On note $\vec{R} = X\vec{x}_1 + Y\vec{y}_1$ la réaction de l'axe (Δ) sur le pendule (S) et I le moment d'inertie du pendule (S) autour de l'axe (Δ).

On note $g\vec{x}_0$ l'accélération de la pesanteur.

1.1 Déterminer dans $\Re_1$ les coordonnées du centre de gravité G du pendule (S).

1.2 Exprimer la masse M du pendule (S) en fonction de μ, r et e.

1.3 Déterminer la vitesse $\vec{V}(G \in S/\Re_0)$ du point G lié au pendule (S) par rapport à $\Re_0$ et l'exprimer dans $\Re_1$.

1.4 Déterminer l'accélération $\vec{\Gamma}(G \in S/\Re_0)$ du point G lié au pendule (S) par rapport à $\Re_0$ et l'exprimer dans $\Re_1$ en fonction de r, θ et de ses dérivées successives par rapport au temps.

1.5 Exprimer dans $\Re_1$ la résultante dynamique $\left(\dfrac{d\vec{P}(S/\Re_0)}{dt}\right)_{\Re_0}$ du pendule (S) par rapport à $\Re_0$.

1.6 Déterminer dans $\Re_1$ l'action de la pesanteur $\vec{P}$ sur le pendule (S).

1.7 Enoncer le théorème de la résultante dynamique et l'appliquer au pendule (S).

1.8 En déduire les coordonnées X et Y de la réaction $\vec{R}$ de l'axe (Δ) sur le pendule (S).

1.9 Déterminer dans $\Re_1$ le moment $\vec{M}_P(O)$ de l'action de la pesanteur $\vec{P}$ au point O.

1.10 Exprimer dans $\Re_1$ le moment cinétique $\vec{L}_O(S/\Re_0)$ du pendule (S) par rapport à $\Re_0$ au point O en faisant l'hypothèse que l'opérateur d'inertie du pendule au point O est diagonal.

1.11 Enoncer le théorème du moment cinétique et l'appliquer au pendule (S) au point O.

1.12 En déduire l'équation du mouvement du pendule (S).

1.13 Déterminer l'énergie cinétique $T(S/\Re_0)$ du pendule (S) dans son mouvement par rapport au référentiel $\Re_0$.

1.14 Déterminer le travail W_{ext} des forces extérieures appliquées au pendule (S) entre une position quelconque du pendule définie par l'angle θ et sa position d'équilibre stable.

1.15 Enoncer le théorème de la variation d'énergie cinétique dans le cas d'un solide unique indéformable.

1.16 Retrouver rapidement l'équation du mouvement du pendule (S).

1.17 Intégrer cette équation dans le cas où l'angle θ reste assez petit au cours du temps.

1.18 Déterminer dans ce cas la période T des oscillations en fonction de M, I, g et r.

1.19 Application numérique : Calculer la période T des oscillations sachant que r = 50 mm, e = 2 mm, μ = 7800 $kg.m^{-3}$, I = $1{,}9.10^{-5}$ $kg.m^2$ et g = $9{,}81 m.s^{-2}$.

1.20 Quelle est, en fonction de I, M et r, la longueur du pendule simple synchrone ?

Exercice 2 : Etude d'un équilibre relatif

Une tige OP, de longueur a, tourne autour du point O à vitesse angulaire ω constante dans un plan horizontal. Un point matériel M de masse m est mobile sans frottement dans ce plan horizontal.

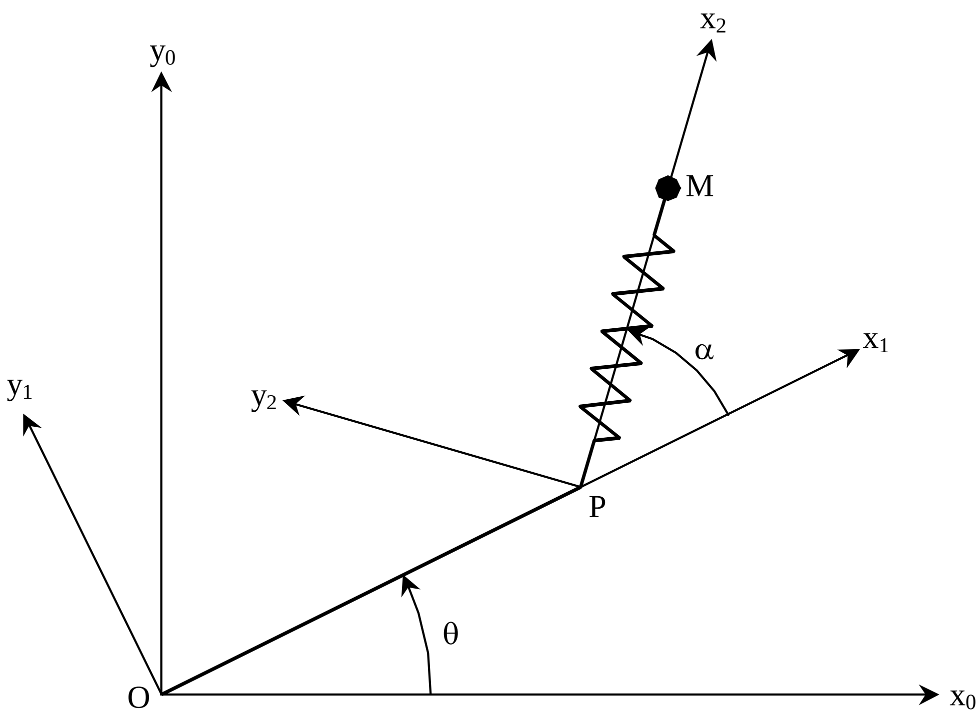
Le référentiel terrestre $\Re_0$ est considéré comme galiléen ; il est rapporté au repère $(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$.
Le référentiel $\Re_0$ est fixe.

On note $\Re_1$ le référentiel rapporté au repère orthonormé direct $(O, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ tel que $\vec{z}_1 = \vec{z}_0$. Le repère $(O, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$, rigidement lié à la tige OP, se déduit à chaque instant de $(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ par une rotation d'angle θ autour de l'axe $O\vec{z}_0$.

On note $\Re_2$ le référentiel rapporté au repère orthonormé direct $(P, \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$ tel que $\vec{z}_2 = \vec{z}_1$. Le repère $(P, \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$ est tel que $P\vec{x}_2$ soit colinéaire à $\vec{PM}$ et se déduit à chaque instant de $(P, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ par une rotation d'angle α autour de l'axe $P\vec{z}_1$.

On note $\vec{OP} = a\,\vec{x}_1$, $\vec{PM} = r\,\vec{x}_2$ et $\omega = \dot{\theta}$.

Le point M est rappelé vers le point P par un ressort exerçant sur le point M une force $\vec{F} = -kr\,\vec{x}_2$.
On néglige les actions de la pesanteur.



2.1 Déterminer la vitesse $\vec{V}(M/\Re_0)$ du point M par rapport à $\Re_0$ et l'exprimer dans $\Re_2$.

2.2 Déterminer l'accélération $\vec{\Gamma}(M/\Re_0)$ du point M par rapport à $\Re_0$ et l'exprimer dans $\Re_2$ en fonction de a, r, ω, α et de ses dérivées successives par rapport au temps.

2.3 Ecrire sous forme vectorielle le théorème de la résultante dynamique appliquée au point M.

2.4 En déduire les 2 équations du mouvement du point M donnant les paramètres r et α en fonction de ω.

2.5 Déterminer les équilibres relatifs M_1 et M_2 du point M par rapport à la tige OP, c'est-à-dire les solutions r et α constantes. A quelles conditions existent- ils ?

2.6 Sans démonstration, quels sont les équilibres stables ?

Fin de l'énoncé