

SESSION 2012

**CAPES
CONCOURS EXTERNE
ET CAFEP**

Section : SCIENCES PHYSIQUES ET CHIMIQUES

COMPOSITION DE PHYSIQUE AVEC APPLICATIONS

Durée : 5 heures

Calculatrice électronique de poche - y compris calculatrice programmable, alphanumérique ou à écran graphique – à fonctionnement autonome, non imprimante, autorisée conformément à la circulaire n° 99-186 du 16 novembre 1999.

L'usage de tout ouvrage de référence, de tout dictionnaire et de tout autre matériel électronique est rigoureusement interdit.

La plus grande importance sera donnée à la qualité de la rédaction et de la présentation des résultats obtenus. Il est rappelé en particulier qu'une application numérique doit comporter un nombre de chiffres significatifs adapté et une unité.

Dans le cas où un(e) candidat(e) repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il (elle) le signale très lisiblement sur sa copie, propose la correction et poursuit l'épreuve en conséquence.

De même, si cela vous conduit à formuler une ou plusieurs hypothèses, il vous est demandé de la (ou les) mentionner explicitement.

NB : Hormis l'en-tête détachable, la copie que vous rendrez ne devra, conformément au principe d'anonymat, comporter aucun signe distinctif, tel que nom, signature, origine, etc. Si le travail qui vous est demandé comporte notamment la rédaction d'un projet ou d'une note, vous devrez impérativement vous abstenir de signer ou de l'identifier.

— Tournez la page S.V.P.

Les disques optiques numériques

Les disques optiques numériques font partie de notre quotidien. Les CD, DVD, Blu-ray, les disques pressés, enregistrables une ou plusieurs fois, s'accumulent dans les salons, les automobiles, les sacs de voyages... Certains disques trouvent même une seconde vie, purement décorative, en étant incorporés dans des réalisations artistiques, grâce aux dégradés de couleurs qu'ils font apparaître spontanément. Le problème porte sur les propriétés mécaniques, thermodynamiques et optiques des disques optiques numériques, ainsi que sur la mécanique des fluides, l'électromagnétisme et le traitement du signal liés aux dispositifs de lecture de l'information stockée.

Il est constitué de cinq parties indépendantes contenant chacune de nombreuses questions indépendantes entre elles.

- Partie I : Etude mécanique d'un disque optique numérique
- Partie II : Etude thermodynamique d'un CD-RW
- Partie III : Comportement optique d'un disque optique numérique
- Partie IV : Lecture de l'information
- Partie V : Mise en rotation du disque et frottements

Partie I : Etude mécanique d'un disque optique numérique

Sur un Compact-Disc, les informations sont stockées sous forme de « creux » et de « plats » le long d'une piste métallique réfléchissante en forme de spirale. Celle-ci démarre à une distance $R_1 = 2,50$ cm de l'axe du CD, et se termine à $R_2 = 5,80$ cm.

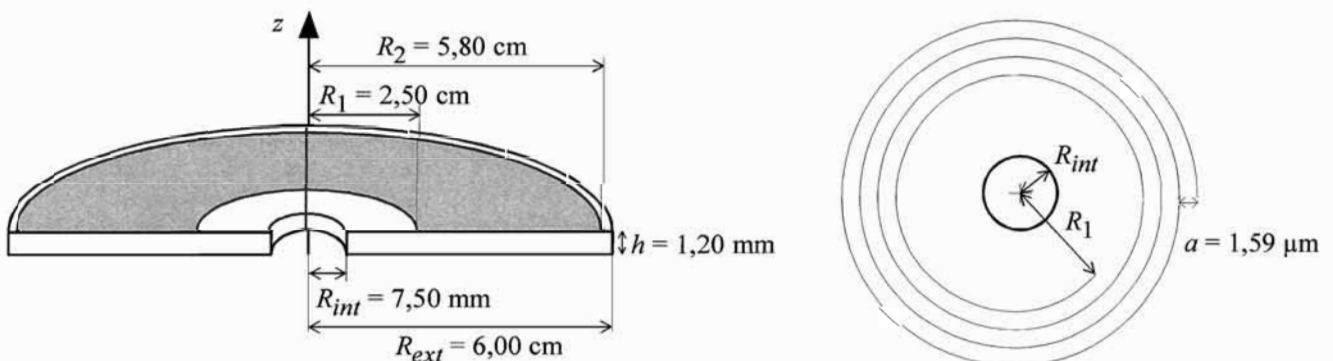


figure 1

Sur la partie gauche de la figure 1, qui donne une vue en perspective d'un demi-CD, la zone grisée correspond à la portion du CD occupée par la piste métallique, la partie blanche est le substrat en polycarbonate. Un extrait de la piste est représenté juste à côté. Afin de rendre la figure plus lisible, les échelles ne sont pas respectées.

Les spécifications du Compact-Disc recommandent une vitesse de lecture linéaire $v_0 = 1,22$ m.s⁻¹ et un pas de spirale de $a = 1,59$ µm. On peut noter que $a \ll R_1$.

Etude de la piste d'un Compact-Disc

- ◆ **1a-** Etablir l'expression littérale de la « surface utile » S du CD, c'est-à-dire la surface grisée de la figure 1 sur laquelle s'étend la piste en spirale.
- ◆ **1b-** Donner, sans démonstration, une estimation de la longueur totale L de la piste en fonction de S et a . Calculer sa valeur numérique.
- ◆ **1c-** Compte tenu des spécifications, quelle valeur numérique de la durée de lecture Δt , exprimée en minutes, cela représente-t-il si la vitesse linéaire de défilement de la piste devant la tête de lecture est constante et égale à v_0 ? Commenter.
- ◆ **1d-** Etablir l'expression de la vitesse angulaire $\Omega(r)$ de rotation que doit avoir le disque lorsque la tête de lecture est à une distance r de l'axe de rotation, et qu'elle voit défiler la piste à la vitesse linéaire constante v_0 .
- ◆ **1e-** Dans l'intervalle $[R_1, R_2]$ pour quelle valeur de r la fonction $\Omega(r)$ est-elle maximale ?
- ◆ **1f-** Donner la valeur numérique de la vitesse angulaire maximale Ω_{max} que doit posséder le CD au cours de la lecture de sa piste à la vitesse v_0 .
- ◆ **1g-** Les lecteurs de CD-ROM ont des vitesses de lecture beaucoup plus importantes que celles des lecteurs de CD audio. Un lecteur dit « 52X » a ainsi une vitesse de lecture linéaire égale à $52v_0$. Quelle est alors la valeur numérique, exprimée en tr/mn, de sa vitesse angulaire maximale de rotation Ω'_{max} ?

Les différents modes de lecture

Pour éviter les difficultés engendrées par les très grandes vitesses de rotation angulaire, certains lecteurs de CD ont un mode de fonctionnement différent : ils assurent une vitesse angulaire constante (mode CAV : « Constant Angular Velocity ») pour le début de la spirale puis une vitesse linéaire constante (mode CLV : « Constant Linear Velocity ») pour le reste. Ainsi, un lecteur dit « 52X » n'assure une vitesse de lecture 52 fois supérieure à celle d'un lecteur « 1X » que sur une partie du disque.

Supposons par exemple que la vitesse angulaire soit constante (mode CAV $\Omega = \Omega_0$) lorsque l'éloignement entre l'axe de rotation et la tête de lecture est compris entre $R_1 = 2,50$ cm et $R_3 = 4,50$ cm ; puis que la vitesse linéaire de défilement de la piste devant la tête de lecture soit constante et égale à $52v_0$ (mode CLV) entre $R_3 = 4,50$ cm et $R_2 = 5,80$ cm.

- ◆ **2a-** Donner l'expression littérale de Ω_0 en fonction des paramètres jugés nécessaires, pour traduire la continuité de la vitesse linéaire de lecture lors du passage du mode CAV au mode CLV.
- ◆ **2b-** En mode CAV à Ω_0 , la vitesse linéaire de lecture est une fonction de l'éloignement r entre l'axe de rotation et la tête de lecture. Donner l'expression littérale de cette fonction $v(r)$.
- ◆ **2c-** On note N_1 le nombre de tours que doit faire le disque pendant toute la durée de la phase CAV. Exprimer N_1 en fonction de R_1 , R_3 et a .
- ◆ **2d-** Déterminer la durée totale Δt_1 de la lecture en mode CAV de la portion de la piste comprise entre R_1 et R_3 . Une expression de Δt_1 en fonction de R_1 , R_3 , v_0 et a est attendue.

- ◆ **2e-** Déterminer la durée totale Δt_2 de la lecture en mode CLV de la portion de la piste comprise entre R_3 et R_2 . Une expression de Δt_2 en fonction de R_2 , R_3 , v_0 et a est attendue.
- ◆ **2f-** Quelle est, en minutes, la durée totale $\Delta t'$ de la lecture de ce disque ?

Le mode CLV présente l'avantage d'optimiser la densité d'information stockée mais il conduit à des vitesses angulaires très importantes en début de piste.

Mécanique dans un référentiel non galiléen

Afin de rendre plus rapide l'accès aux données, les vitesses de rotation des lecteurs ont augmenté au fil des années. Des expériences menées sur des CD-ROM ont montré qu'ils pouvaient se briser en une multitude de petits fragments lorsque la vitesse angulaire dépasse environ $3,00 \cdot 10^4 \text{ tr} \cdot \text{min}^{-1}$.

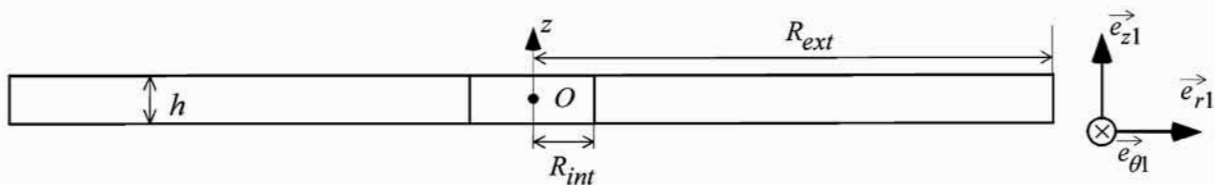


figure 2

Un lecteur de CD-ROM est fixé sur une table. On suppose que le référentiel \mathcal{R}_0 lié à la table est galiléen. On lui associe un repère orthonormé direct (O, x, y, z) . A l'intérieur du lecteur, un dispositif d'entraînement communique au CD-ROM un mouvement de rotation autour de l'axe Oz , vertical ascendant. La vitesse angulaire est notée Ω . Dans cette question, le CD-ROM est modélisé par un cylindre homogène en polycarbonate de hauteur $h = 1,20 \text{ mm}$, de rayon $R_{ext} = 6,00 \text{ cm}$, percé en son centre d'un trou circulaire de rayon $R_{int} = 7,50 \text{ mm}$. Sa masse volumique est $\mu = 1,20 \cdot 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$. Soit \mathcal{R}_1 le référentiel lié au disque. On lui associe le repère orthonormé direct (O, x_1, y_1, z_1) , l'axe Oz_1 étant confondu avec l'axe Oz . On note $(\vec{e}_{r1}, \vec{e}_{\theta1}, \vec{e}_{z1})$ la base vectorielle des coordonnées cylindriques permettant de repérer un point dans \mathcal{R}_1 . Dans le cas où \mathcal{R}_1 est animé par rapport à \mathcal{R}_0 d'un mouvement de rotation uniforme autour de l'axe Oz , on admet que l'accélération d'inertie d'entraînement d'un point M s'écrit :

$$\vec{a}_{ie} = \vec{\Omega} \wedge (\vec{\Omega} \wedge \vec{OM}), \vec{\Omega} \text{ étant le vecteur rotation de } \mathcal{R}_1 \text{ par rapport à } \mathcal{R}_0.$$

On peut se référer à la figure 2.

- ◆ **3a-** Donner la définition d'un référentiel galiléen.
- ◆ **3b-** Galileo Galilei, dit Galilée (1564 - 1642), était un physicien et astronome italien. Donner, très succinctement, deux éléments du contenu de son travail scientifique.
- ◆ **3c-** On conduit l'étude dans le référentiel \mathcal{R}_1 lié au disque. La vitesse angulaire est constante au cours du temps : $\Omega = \Omega_1$. On considère un point matériel M de masse m , fixe dans \mathcal{R}_1 , repéré par ses coordonnées cylindriques (r_1, θ_1, z_1) . Exprimer la force d'inertie d'entraînement \vec{F}_{ie} à laquelle est soumis le point M .

Résistance mécanique des disques optiques numériques

On se place dans le référentiel \mathcal{R}_1 . Afin d'étudier les forces qui assurent la cohésion d'un CD-ROM en rotation uniforme à la vitesse angulaire Ω_1 , considérons une portion de disque dont la distance à l'axe de rotation s'étend de r_1 à $r_1 + dr_1$ (figure 3).

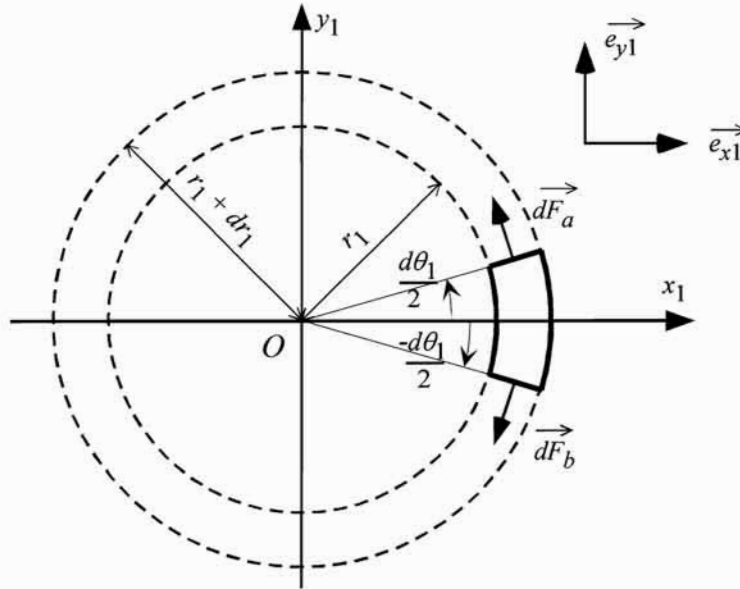


figure 3

Au sein de cette couronne circulaire, isolons un élément de largeur angulaire élémentaire $d\theta_1$, situé dans le domaine angulaire $[-\frac{d\theta_1}{2}, \frac{d\theta_1}{2}]$.

- ◆ **4a-** Quelle est l'expression de la masse d^2m de cet élément de CD-ROM d'épaisseur h ?
- ◆ **4b-** Quelle est, dans la base $(\vec{e}_{x1}, \vec{e}_{y1})$, l'expression de la force d'inertie d'entraînement $\overrightarrow{d^2F_{ie}}$ qui s'exerce sur l'élément de masse d^2m ?
- ◆ **4c-** On note $\overrightarrow{dF_a}$ et $\overrightarrow{dF_b}$ les forces exercées sur l'élément considéré par les deux secteurs angulaires voisins (voir figure 3). Soit σ la contrainte (force normale par unité de surface) à l'interface entre deux éléments de la portion de disque. On a donc $\|\overrightarrow{dF_a}\| = \|\overrightarrow{dF_b}\| = \sigma dS$, $dS = h dr_1$ étant la surface rectangulaire de séparation. Donner, dans la base $(\vec{e}_{x1}, \vec{e}_{y1})$, les expressions vectorielles approchées de $\overrightarrow{dF_a}$ et $\overrightarrow{dF_b}$, en se limitant à l'ordre 1 par rapport à $d\theta_1$.
- ◆ **4d-** En écrivant l'équilibre dans \mathcal{R}_1 de l'élément de masse d^2m (supposé, pour simplifier l'étude, soumis uniquement à $\overrightarrow{d^2F_{ie}}$, $\overrightarrow{dF_a}$ et $\overrightarrow{dF_b}$), exprimer σ en fonction de μ , r_1 et Ω_1 .
- ◆ **4e-** Pour quelle valeur de $r_1 \in [R_{int}, R_{ext}]$ la contrainte σ est-elle maximale ?
- ◆ **4f-** On donne la contrainte de rupture du polycarbonate : $\sigma_{rup} = 65,0$ MPa. Exprimer puis calculer numériquement la vitesse angulaire Ω_{1max} à partir de laquelle le disque risque de se briser.

Le calcul mené ci-dessus ne donne qu'un ordre de grandeur, dans la mesure où il ne prend pas en compte les interactions entre les différentes couronnes.

Partie II : Etude thermodynamique d'un CD-RW

On s'intéresse ici à des disques de type CD-RW (« réinscriptible »), c'est-à-dire sur lesquels il est possible d'enregistrer des informations mais aussi de les effacer. La structure de ces disques est la suivante : une couche de matériau photosensible (à base d'argent, d'indium, de tellure et d'antimoine), est insérée entre la couche métallique réfléchissante et la couche de polycarbonate.

Ce matériau photosensible possède 2 variétés polymorphiques : l'une, polycristalline, est transparente et l'autre, amorphe, est opaque. Si l'on fait fondre la couche photosensible polycristalline pendant une durée brève, elle adopte l'état amorphe lors du refroidissement. C'est le processus d'« écriture ». L'« effacement » s'obtient en chauffant la couche photosensible moins fortement mais pendant une durée plus longue. Ce processus permet de ramener la couche photosensible dans son état polycristallin.

On note h_1 l'épaisseur de la couche photosensible, c_1 sa capacité thermique massique, μ_1 sa masse volumique, et ℓ_1 sa chaleur latente massique de fusion. Sa température de fusion est notée T_{fus} .

L'objet de cette partie est d'analyser le processus d'écriture de l'information sur un CD-RW.

Généralités sur les systèmes diphasés

- ◆ **5a-** Quelle est la particularité d'un mélange diphasé d'un corps pur dont la pression P est fixée ?
- ◆ **5b-** Comment appelle-t-on les transitions liquide \rightarrow vapeur et solide \rightarrow vapeur ?
- ◆ **5c-** Dessiner l'allure du diagramme (P,u) d'un corps pur pour la transition liquide-vapeur, u représentant le volume massique. Tracer quelques isothermes et préciser où se situent la courbe de rosée, la courbe d'ébullition, les domaines du liquide seul, de l'équilibre liquide-vapeur et de la vapeur sèche.

Evaluation de la vitesse maximale d'écriture

Le faisceau laser d'écriture est assimilé à un cylindre circulaire de rayon r_0 , d'axe orthogonal à la surface du disque. La puissance thermique apportée par le laser à la couche photosensible est notée P_0 . Elle est supposée uniformément répartie dans la section du faisceau. Le laser fonctionne en régime stationnaire.

Dans un premier temps, le disque ne tourne pas.

- ◆ **6a-** Enoncer le premier principe de la thermodynamique.
- ◆ **6b-** Donner l'expression du volume V_1 de couche photosensible qui reçoit la lumière du laser. Quelle est sa masse m_1 ?
- ◆ **6c-** Donner l'expression de la variation d'enthalpie de cette masse m_1 de matière photosensible quand sa température passe d'une valeur initiale T_i à une valeur finale T_f sans changer d'état.
- ◆ **6d-** Quelle énergie Q_1 faut-il apporter sous forme thermique à la masse m_1 de matière photosensible pour la faire passer de la température ambiante T_0 à la température de fusion T_{fus} sans changer d'état ?
- ◆ **6e-** Quelle énergie Q_2 faut-il apporter sous forme thermique à la masse m_1 pour la faire fondre entièrement, la température restant constante et égale à T_{fus} ?

- ◆ **6f-** On suppose que la puissance du laser est totalement absorbée par la couche photosensible. Quelle est, en fonction de Q_1 , Q_2 et P_0 , l'expression de la durée minimale Δt_{min} pendant laquelle il est nécessaire d'illuminer le disque à l'arrêt pour réchauffer et faire fondre entièrement la zone de la couche photosensible située en face du faisceau ?
- ◆ **6g-** Calculer Δt_{min} pour $c_1 = 2,50.10^2 \text{ J.K}^{-1}.\text{kg}^{-1}$, $T_0 = 300 \text{ K}$, $T_{fus} = 900 \text{ K}$, $\ell_1 = 1,00.10^5 \text{ J.kg}^{-1}$, $P_0 = 14,0 \text{ mW}$, $h_1 = 1,00 \text{ }\mu\text{m}$, $r_0 = 0,550 \text{ }\mu\text{m}$ et $\mu_1 = 3,00.10^3 \text{ kg.m}^{-3}$.

A présent, le disque optique est animé d'un mouvement de rotation tel que la piste du CD-RW défile à vitesse linéaire constante v_1 devant le faisceau laser.

- ◆ **7a-** Quelle est la surface dS balayée sur le disque optique par le faisceau laser pendant une durée dt ?
- ◆ **7b-** Quel est le volume $d\tau$ de matériau photosensible que le laser doit amener de la température ambiante T_0 à la température T_{fus} puis faire fondre pendant dt ?
- ◆ **7c-** L'énergie minimale à apporter à une masse dm de la couche photosensible pour l'amener à la température T_{fus} puis la faire fondre est :

$$\delta Q = [c_1(T_{fus} - T_0) + \ell_1]dm$$

En déduire l'expression de la vitesse maximale v_{1max} d'écriture du CD-RW pour la puissance P_0 du laser.

- ◆ **7d-** Calculer v_{1max} à l'aide des valeurs numériques données à la question **6g**.

Partie III : Comportement optique d'un disque optique numérique

Diffraction par un miroir plan rectangulaire

On considère un miroir plan rectangulaire, de centre O , de largeur b et de longueur H , disposé dans le plan xOy , le petit côté b étant parallèle à Oy . On suppose que $b \ll H$. On peut se référer à la figure 4.

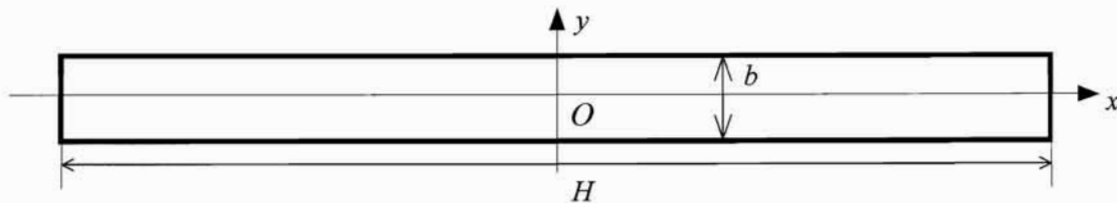


figure 4

- ◆ **8a-** L'étude quantitative des phénomènes de diffraction s'appuie sur le principe de Huygens-Fresnel. Ce principe est-il le fruit d'un travail concerté entre Christian Huygens et Augustin Fresnel ?
- ◆ **8b-** Quelle est la contribution de chacun dans la formulation actuelle de ce principe ?

On s'intéresse à la diffraction de Fraunhofer par le miroir rectangulaire. Il est supposé éclairé par une source ponctuelle S_∞ , située à l'infini. L'onde incidente est donc plane et progressive. Sa direction de propagation est contenue dans le plan yOz et fait avec l'axe Oz un angle orienté θ_i (compris entre $-\pi/2$ et $\pi/2$). La source S_∞ est supposée monochromatique, de longueur d'onde dans le vide $\lambda_1 = 589 \text{ nm}$.

On peut se référer à la figure 5.

- ◆ **9a-** Rappeler la définition d'une onde plane.
- ◆ **9b-** Comment peut-on, en pratique, obtenir une onde localement plane et progressive dans une expérience de laboratoire ?
- ◆ **9c-** Quelle est la couleur de la source de longueur d'onde dans le vide $\lambda_1 = 589 \text{ nm}$?
- ◆ **9d-** On rappelle que les ondes lumineuses visibles correspondent à des longueurs d'ondes dans le vide comprises entre $\lambda_{\min} = 400 \text{ nm}$ et $\lambda_{\max} = 750 \text{ nm}$. Quelles sont les couleurs associées à chacune de ces deux longueurs d'onde ?

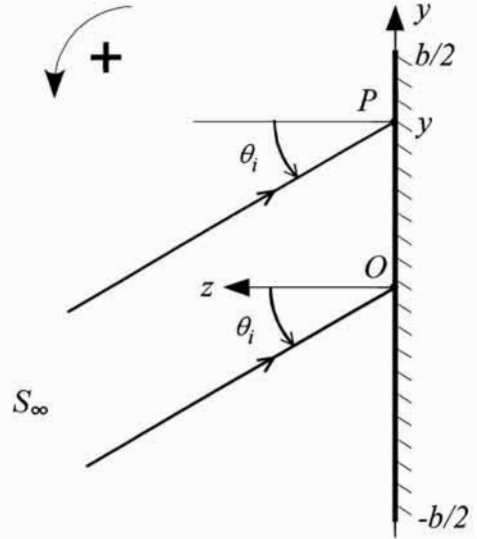


figure 5

On adopte un modèle scalaire pour la lumière, ainsi que la notation complexe : la grandeur lumineuse complexe en un point M , associée à une onde plane progressive monochromatique de pulsation ω et de vecteur d'onde \vec{k} est notée : $\underline{s}(M, t) = \underline{a}_0 e^{j(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{OM})}$, avec $j^2 = -1$.

- ◆ **10-** Qu'appelle-t-on le modèle scalaire de la lumière ?

Compte tenu de la forme très allongée du miroir ($b \ll H$), on restreint l'étude de l'onde diffractée aux directions de propagation contenues dans le plan yOz .

Grâce à une lunette de visée, on observe la lumière diffractée en un point M_∞ , situé à l'infini dans la direction repérée par l'angle orienté θ_d (compris entre $-\pi/2$ et $\pi/2$). On peut se référer à la figure 6.

A propos de la lunette

- ◆ **11a-** La lunette de visée est autocollimatrice. Expliquer la signification de ce terme.
- ◆ **11b-** Décrire en quelques lignes la méthode permettant de la régler pour observer à l'infini.

Etude de la différence de chemin optique

- ◆ **12a-** Qu'appelle-t-on un chemin optique ?
- ◆ **12b-** Exprimer la différence de chemin optique en M_∞ $\delta = (S_\infty PM_\infty) - (S_\infty OM_\infty)$ entre le rayon issu de S_∞ se réfléchissant en un point P du miroir, et celui issu de S_∞ se réfléchissant en O . P a pour coordonnées $(0, y, 0)$ dans le repère (O, x, y, z) . On suppose que l'indice de l'air est égal à 1.

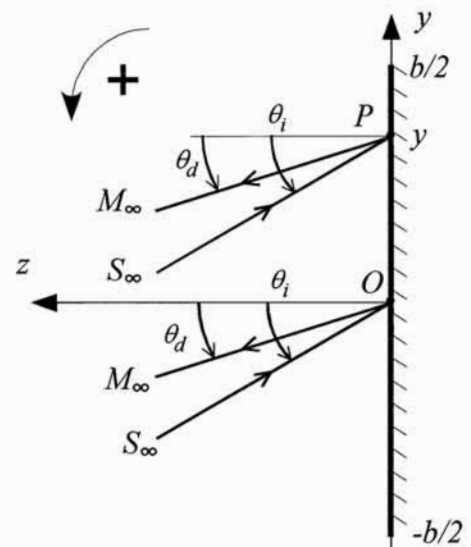


figure 6

On rappelle que, dans le cas du miroir étudié ici, l'amplitude complexe de la grandeur lumineuse en M_∞ peut s'écrire sous forme intégrale : $\underline{s} = \underline{KH} \int_{-b/2}^{b/2} \underline{s}_0 e^{-j\frac{2\pi\delta}{\lambda_1}} dy$, \underline{K} étant une grandeur de dimensionnement (fixée par les choix de O et de M_∞) et \underline{s}_0 étant l'amplitude complexe de l'onde incidente en O .

- ♦ **12c-** En déduire que \underline{s} peut se mettre sous la forme : $\underline{s} = \underline{KHbS}_0 F\left(\frac{\pi b}{\lambda_1}(\sin \theta_i + \sin \theta_d)\right)$, où F est une fonction à déterminer.
- ♦ **12d-** En déduire l'expression de l'éclairement en M_∞ .

On donne le graphe de la fonction F sur la figure 7.

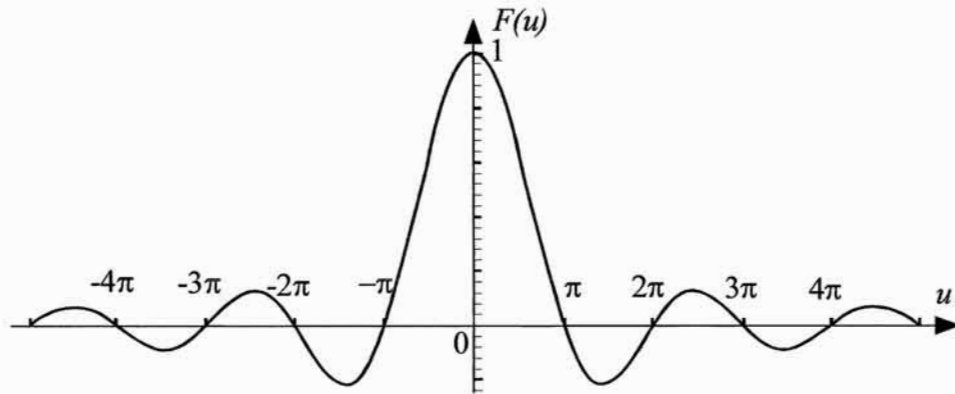


figure 7

- ♦ **13a-** Pour $\theta_i = 0$, exprimer l'ouverture angulaire $\Delta\theta_d$ du faisceau diffracté correspondant au maximum principal de diffraction. Cette ouverture angulaire correspond à l'écart entre les deux valeurs (de signe opposé) de θ_d qui conduisent à la première annulation de l'éclairement. On ne fera pas l'approximation des petits angles et on supposera que $b > \lambda_1$.
- ♦ **13b-** On note \mathcal{E}_{max1} la valeur de l'éclairement pour le maximum principal de diffraction, et \mathcal{E}_{max2} celle correspondant au premier maximum secondaire. Estimer, à l'aide du graphe, la valeur du rapport $\frac{\mathcal{E}_{max2}}{\mathcal{E}_{max1}}$.

Relation fondamentale des réseaux

On considère un ensemble de N miroirs plans, rectangulaires, de largeur b et de longueur $H \gg b$. Ils sont tous disposés dans le plan xOy , leur petit côté b étant parallèle à Oy . Le centre O_1 du miroir numéro 1 est confondu avec l'origine O du repère orthonormé direct $(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$. Cet ensemble constitue un réseau de miroirs.

Le centre O_n du miroir numéro n est situé sur l'axe Oy à une abscisse $y_n = (n-1)a$, avec $n \in \{1, 2, \dots, N\}$.

Une source ponctuelle S_∞ , située à l'infini, envoie sur le réseau de miroirs une onde lumineuse considérée comme plane, progressive et monochromatique de longueur d'onde dans le vide λ_1 . L'indice de l'air est supposé égal à 1.

La direction de l'onde incidente est contenue dans le plan yOz et fait avec l'axe Oz un angle orienté θ_i (compris entre $-\pi/2$ et $\pi/2$). On peut se référer à la figure 8.

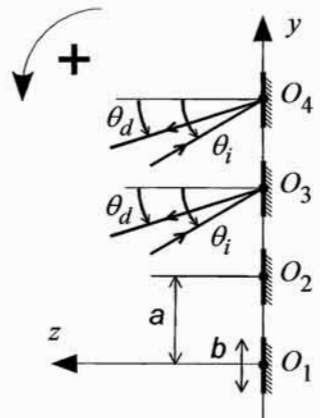


figure 8

Dans un premier temps, la largeur b des miroirs est supposée suffisamment petite pour que l'on puisse considérer que l'intersection du miroir numéro n avec le plan yOz se limite au point O_n .

Les miroirs étant très allongés selon Ox , on restreint l'étude de l'onde diffractée aux directions contenues dans le plan yOz .

On adopte la notation complexe : la grandeur lumineuse complexe en un point M , associée à l'onde plane monochromatique de pulsation ω et de vecteur d'onde \vec{k} est notée : $\underline{s}(M, t) = \underline{a}_0 e^{j(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{OM})}$.

Grâce à une lunette de visée, on observe la lumière diffractée en M_∞ , situé à l'infini dans la direction repérée par l'angle orienté θ_d (compris entre $-\pi/2$ et $\pi/2$).

- ◆ **14a-** Quelle est, en M_∞ , la différence de chemin optique $\delta_{n+1,n} = (S_\infty O_{n+1} M_\infty) - (S_\infty O_n M_\infty)$ entre deux ondes issues de S_∞ se réfléchissant sur les centres des deux miroirs consécutifs, numérotés n et $n+1$?
- ◆ **14b-** En déduire le retard de phase ψ en M_∞ , de l'onde passant par O_{n+1} par rapport à celle passant par O_n .
- ◆ **14c-** Quelles sont les valeurs de ψ qui conduisent à des interférences constructives entre les N ondes lumineuses issues de S_∞ après réflexion sur les N miroirs ? On introduira un entier relatif p , appelé « ordre d'interférence du réseau ».

Pour la suite, on admet la « relation fondamentale des réseaux » :
$$\sin \theta_i + \sin \theta_d = p \frac{\lambda_1}{a} \quad (1)$$

- ◆ **14d-** Préciser sa signification physique.
- ◆ **14e-** Pour $p = 0$, quelle relation obtient-on entre θ_d et θ_i ? Que retrouve-t-on ainsi ?
- ◆ **14f-** Toutes les valeurs de p sont-elles possibles ? Justifier.

On tient compte à présent de la largeur b des miroirs.

- ◆ **15-** Qualitativement, quelle est l'influence de la largeur b des miroirs sur les différents pics d'éclairement des différents ordres d'interférences du réseau ?

Expériences en lumière blanche sous incidence normale

La piste en spirale d'un disque optique numérique lui confère localement une structure de réseau de diffraction par réflexion. En effet, chaque secteur angulaire élémentaire de la couche métallique du disque se comporte comme un ensemble de petits miroirs plans régulièrement espacés, avec une période spatiale correspondant au pas de la spirale. On rappelle que dans le cas d'un CD, le pas est $a = 1,59 \mu\text{m}$. Pour simplifier l'étude, on ne prend pas en compte le polycarbonate qui recouvre la couche métallique du CD.

Supposons qu'un CD soit posé sur le sol d'une pièce dans laquelle la seule source lumineuse est une lampe à filament, située exactement à la verticale du centre du CD. On considèrera que le CD est ainsi éclairé en incidence normale par une lumière blanche assimilée, pour simplifier, à une onde plane progressive polychromatique, de densité spectrale d'éclairement constante, dans tout le domaine visible. La couche métallique du CD est en contact avec le sol.

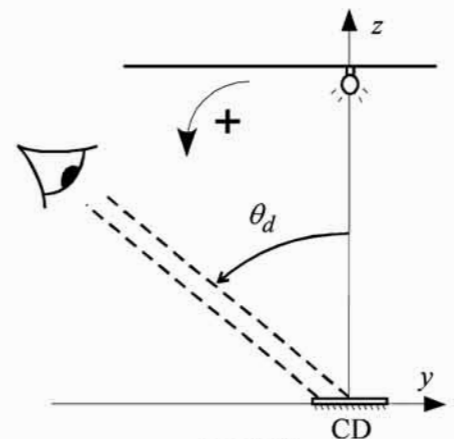


figure 9

Un observateur situé à quelques mètres du CD, porte son regard sur celui-ci. Pour simplifier l'étude, on supposera qu'il ne regarde que la partie du CD située dans le voisinage du plan yOz , et qu'il observe les rayons lumineux diffractés à l'infini dans une direction faisant un angle θ_d avec la verticale Oz . On peut consulter la figure 9.

- ◆ **16a-** Décrire ce que voit l'observateur en se déplaçant de manière à faire croître l'angle θ_d , de 0 à $\pi/2$.
- ◆ **16b-** A l'aide de la relation fondamentale des réseaux (1), établir l'équation permettant de déterminer quels sont les angles θ_d pour lesquels une longueur d'onde λ donnée du domaine visible présente un pic d'éclairement.
- ◆ **16c-** Combien de pics d'éclairement la longueur d'onde $\lambda_2 = 500$ nm présente-t-elle pour $\theta_d \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ (on ne comptera pas l'ordre 0) ?
- ◆ **16d-** Y a-t-il recouvrement de certains ordres du réseau en lumière blanche ? Si oui, préciser lesquels.

Généralisation

- ◆ **17-** Si le CD est remplacé par un DVD (qui contient plus d'informations, notamment grâce à un sillon plus étroit), le nombre de pics d'éclairement pour la longueur d'onde $\lambda_2 = 500$ nm est-il plus ou moins important ? Une réponse justifiée est attendue.
- ◆ **18a-** On revient au CD. Si la source lumineuse n'est plus une lampe à filament mais une lampe fluocompacte, dont le spectre d'émission est donné sur la figure 10, dire sans calcul ce que voit qualitativement l'observateur en faisant croître θ_d de 0 à $\pi/2$.

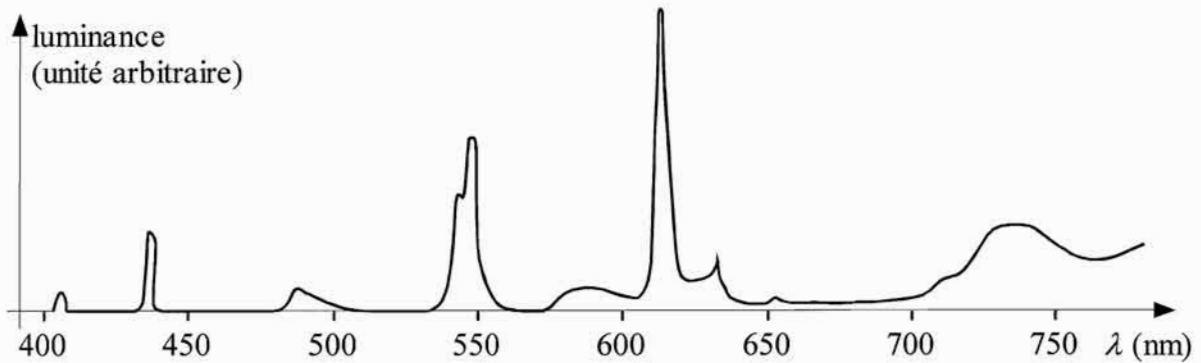


figure 10 : spectre d'émission d'une lampe fluocompacte (luminance en fonction de la longueur d'onde)

- ◆ **18b-** Expliquer très succinctement pourquoi une lampe fluocompacte a un spectre d'émission très différent de celui d'une lampe à filament.

Utilisation d'un laser

L'étude en lumière blanche du paragraphe précédent avait pour but d'interpréter des observations de la vie quotidienne. Pour effectuer une mesure du pas de la spirale d'un disque optique numérique, il est préférable d'utiliser une source plus monochromatique. Le plus simple aujourd'hui est d'avoir recours à un laser.

- ◆ **19a-** De quand date l'invention du laser ?

- ◆ **19b-** Expliquer très succinctement en quoi consiste l'émission stimulée. Qui a donné la première explication de ce processus ?
- ◆ **19c-** Quels sont les éléments qui composent une source laser ?
- ◆ **19d-** Donner deux applications courantes du laser et indiquer pour chacune les principales qualités de la source laser qui y sont exploitées.

Partie IV : Lecture de l'information

A) Asservissement de la focalisation du faisceau lumineux sur la surface du disque

Le positionnement de la cellule de lecture doit être assuré avec précision, afin que la tache lumineuse sur le disque soit la plus fine possible (focalisation) et qu'elle se trouve bien en face de la piste (suivi de piste ou « tracking »).

Du fait des défauts du disque (planéité imparfaite, légère excentricité du trou, ...), il est nécessaire d'asservir la position de la tête de lecture à celle de la piste qu'elle doit lire. Nous nous intéressons dans cette partie uniquement à la détection de l'erreur de focalisation et à l'actuateur qui permet de la corriger.

Déviatation d'un rayon lumineux par un prisme

Un prisme, d'indice n , d'angle au sommet A , est représenté sur la figure 11. Un rayon incident arrive sur la face d'entrée avec un angle i par rapport à la normale à la face. Les angles dans le prisme sont notés r et r' , et l'angle de sortie i' ; ces angles sont définis par rapport aux normales aux dioptries. La déviatation D repère la direction du rayon de sortie par rapport à celle du rayon entrant. Les orientations des angles ont été choisies pour que les valeurs des angles i , i' , r , r' et D soient positives. L'indice de l'air sera pris égal à 1.

- ◆ **20a-** Rappeler les lois de Snell-Descartes reliant i et i' à r et r' .
- ◆ **20b-** Etablir le lien entre r , r' et A .
- ◆ **20c-** Exprimer la déviatation D en fonction de i , i' et A .
- ◆ **20d-** Dans le cadre de l'approximation des petits angles, établir que $D = (n - 1)A$.

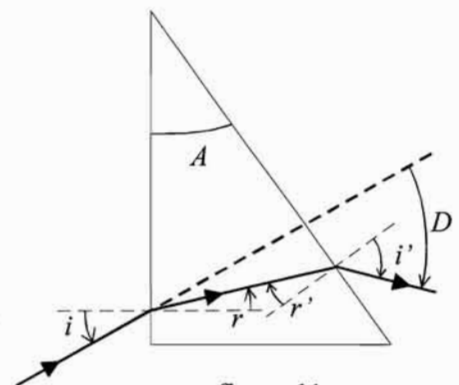


figure 11

Un prisme rectangle, de petit angle A , est disposé selon la configuration de la figure 12 : la face d'entrée est dans le plan yO_1z et la base dans le plan xO_1y . La longueur de sa base est notée b_1 et h_1 représente sa hauteur. Une source lumineuse ponctuelle S a pour coordonnées $(-d, 0)$ dans le plan xO_1z . On suppose que $d \gg h_1 \gg b_1$.

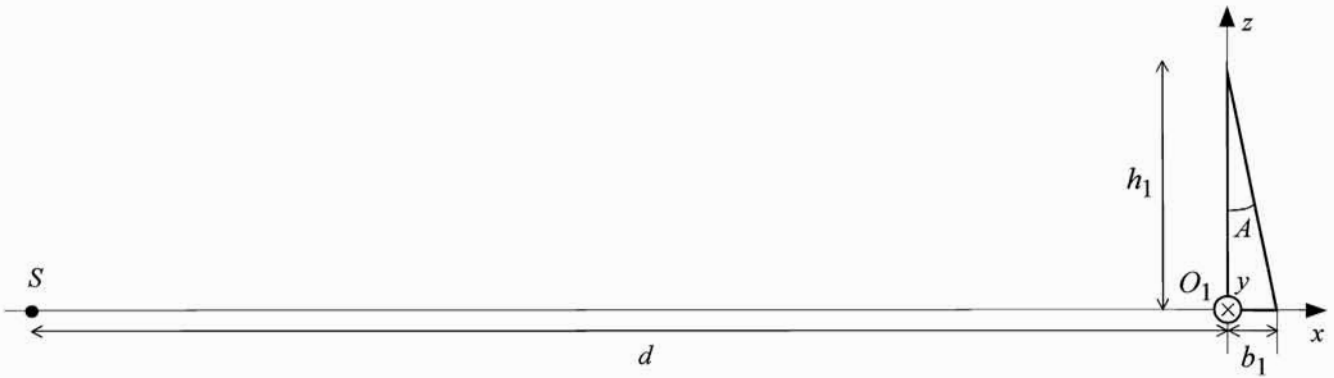


figure 12

On admet qu'avec un stigmatisme approché, S donne à travers le prisme une image S' , qui a pour coordonnées $(-d, z_0)$ dans le plan xO_1z , avec $z_0 > 0$.

- ◆ **21a-** Reproduire le schéma de la figure 12 sur votre copie, placer l'image S' de S , en prenant, pour cette question uniquement, $z_0 = \frac{h_1}{2}$, et tracer les parcours de deux rayons lumineux partant de S et traversant le prisme.
- ◆ **21b-** Montrer que, dans le cadre des approximations de la question 20, $z_0 = (n - 1)Ad$.

Détection optique d'une erreur de focalisation

Il existe deux techniques couramment utilisées pour détecter un défaut de focalisation du faisceau lumineux sur le disque : l'une fait appel à une lentille astigmatique tandis que l'autre met en œuvre un double coin prismatique.

Nous nous intéresserons ici à la seconde technique, dont nous allons étudier le principe, mais avec un dispositif s'éloignant un peu de celui réellement utilisé, dans un souci de simplification. Ce dispositif, schématisé sur la figure 13, est constitué d'une lame semi-réfléchissante, d'une lentille L_2 , d'un double coin prismatique de hauteur totale $2h_1$, et d'un ensemble de 4 capteurs lumineux.

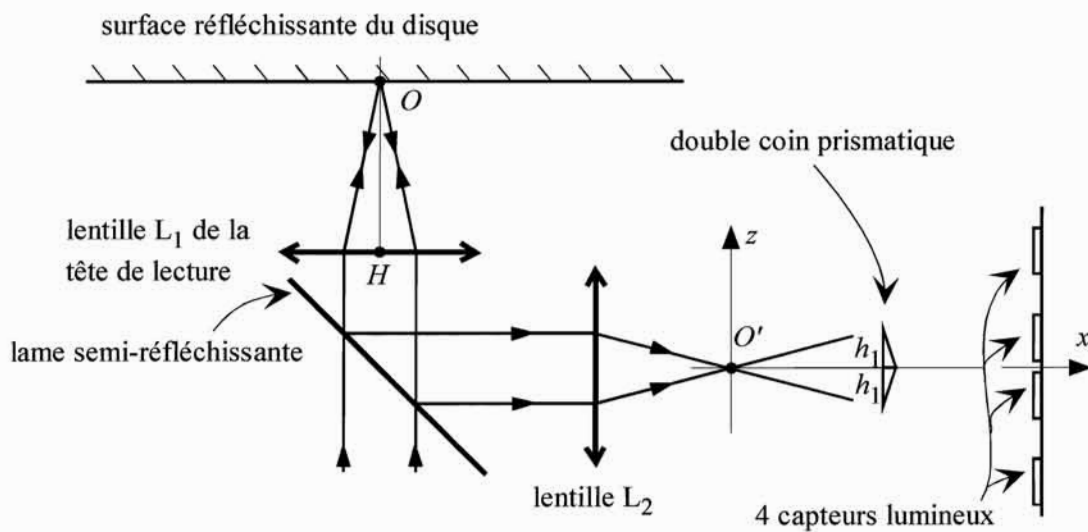


figure 13

Le disque optique est assimilé ici à un miroir plan parfait. La focalisation est bonne lorsque le point O du disque optique est confondu avec le foyer image F'_1 de la lentille de lecture L_1 . A la sortie de la lentille L_2 , le faisceau converge alors au point O' , origine du repère $xO'z$ adopté pour cette partie.

- ◆ **22a-** Supposons qu'une perturbation entraîne une légère translation du disque vers le bas sur la figure 13 (le point O se trouve ainsi sous F'_1). On note N le nouveau point de convergence des rayons après la traversée de L_2 . Où est alors situé N par rapport à O' ? Une réponse justifiée est attendue.
- ◆ **22b-** Où sont alors situées les deux images de N à travers le double prisme ?
- ◆ **22c-** Lorsque N est confondu avec O' , le faisceau lumineux issu du prisme du haut semble provenir de l'image O'_1 de O' à travers ce prisme, et recouvre la moitié de chacun des capteurs n° 3 et 4, comme le montre la figure 14. Sans calcul, et à l'aide d'un schéma représentant les capteurs 3 et 4 en vue de face, décrire comment sont modifiées leurs zones éclairées (donc grisées) si le point N se trouve sur l'axe $O'x$, légèrement à droite de O' . Justifier.

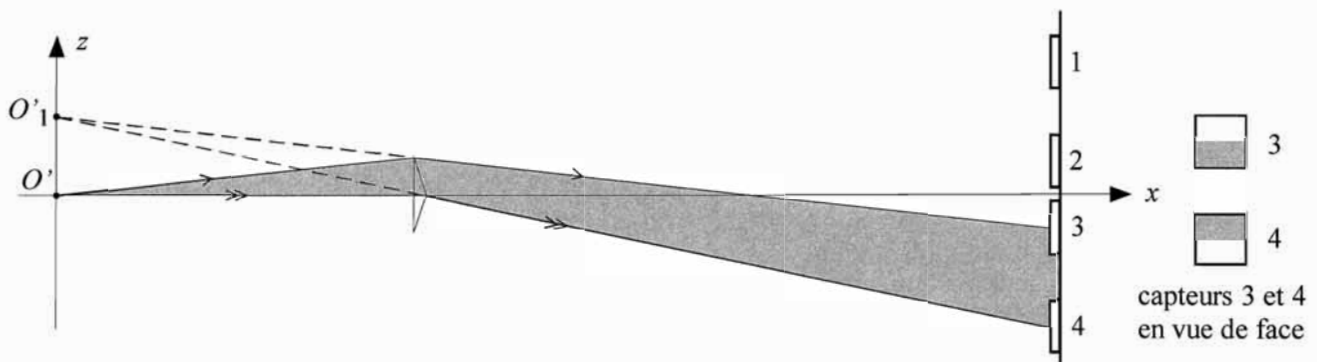


figure 14

Des décalages de N selon les directions des axes $O'x$ et $O'z$, conduisent à des modifications des zones illuminées des 4 capteurs. La partie qui suit donne un exemple de traitement électronique de l'information, permettant d'élaborer des signaux d'erreur de position en x et en z du point N .

Elaboration électronique des signaux d'erreur de position

Dans les conditions de l'expérience, chaque capteur lumineux permet d'obtenir une tension proportionnelle à la surface de sa zone illuminée. Le coefficient de proportionnalité est le même pour les 4. Notons v_i la tension associée au capteur numéro i .

On admet que lorsque tous les rayons lumineux convergent en O' avant de traverser le double coin prismatique, les tensions v_1 et v_2 sont égales à V_0 tandis que les tensions v_3 et v_4 ont pour valeur V'_0 .

Lorsque le point de focalisation n'est pas O' mais un point N , de coordonnées (x,z) , les tensions sur chaque capteur deviennent :

$$\begin{aligned} v_1 &= V_0 - \beta z \\ v_2 &= V_0 + \alpha x + \beta z \\ v_3 &= V'_0 + \alpha x - \beta z \\ v_4 &= V'_0 + \beta z \end{aligned}$$

α et β étant des constantes positives.

- ◆ **23-** Proposer une combinaison linéaire de ces 4 tensions, donnant un signal proportionnel à la coordonnée x du point de focalisation, les coefficients de la combinaison linéaire étant indépendants de V_0 et V'_0 .

On considère à présent les montages électroniques des figures 15a et 15b, dans lesquels chaque amplificateur opérationnel est supposé idéal et en fonctionnement linéaire.

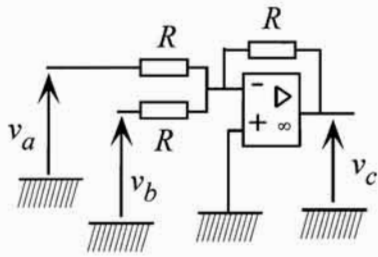


figure 15a

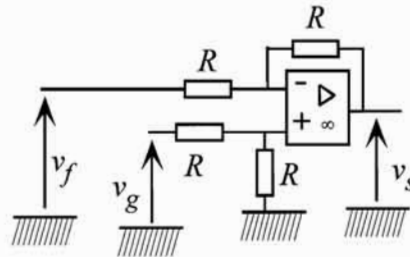


figure 15b

- ◆ **24a-** Le montage de la figure 15a comporte deux entrées et une sortie. Déterminer son impédance de sortie.
- ◆ **24b-** Etablir l'expression de la tension de sortie v_c en fonction des tensions d'entrée v_a et v_b .
- ◆ **24c-** Montrer que cette relation reste encore valable (dans le cadre des hypothèses énoncées plus haut) si un autre circuit est branché entre les deux bornes de sortie du montage de la figure 15a.
- ◆ **24d-** Le montage de la figure 15b comporte lui aussi deux entrées et une sortie. Déterminer son impédance d'entrée pour l'entrée associée à la tension v_g .
- ◆ **24e-** Exprimer la tension de sortie v_s en fonction de v_f et v_g .
- ◆ **24f-** Proposer un montage permettant d'obtenir une tension proportionnelle à la coordonnée x du point N de focalisation à la sortie de la lentille L_2 .

Actuateur électromécanique pour la correction de l'erreur de focalisation

Un aimant permanent, schématisé sur la figure 16a, à symétrie de révolution autour de l'axe Oz , crée un champ magnétique radial qui s'écrit : $\vec{B} = B_0 \vec{e}_r$, B_0 étant supposé identique en tout point de l'entrefer. \vec{e}_r représente le vecteur unitaire radial des coordonnées cylindriques.

Le bloc de lecture est constitué d'un bobinage de N_b spires circulaires de rayon r_b , solidaire d'un cadre sur lequel est fixée une lentille convergente. On note i_b le courant électrique qui parcourt les N_b spires ; son orientation est précisée sur la figure 16a.

Le bloc de lecture, mobile en translation parallèlement à Oz , est relié à l'aimant par l'intermédiaire d'un système de suspension que l'on assimilera à un ressort unique de raideur k , en parallèle avec un amortisseur (non représenté sur la figure). L'action de l'amortisseur sur l'équipage mobile est modélisée par une force de frottements visqueux, donnée par la relation : $\vec{F}_{frott} = -f \vec{v}_b$, où \vec{v}_b est la vitesse du bloc de lecture par rapport à l'aimant, et f est un coefficient positif. L'aimant est fixe dans le référentiel d'étude, supposé galiléen.

On note m_b la masse de l'équipage mobile, c'est-à-dire du bloc de lecture.

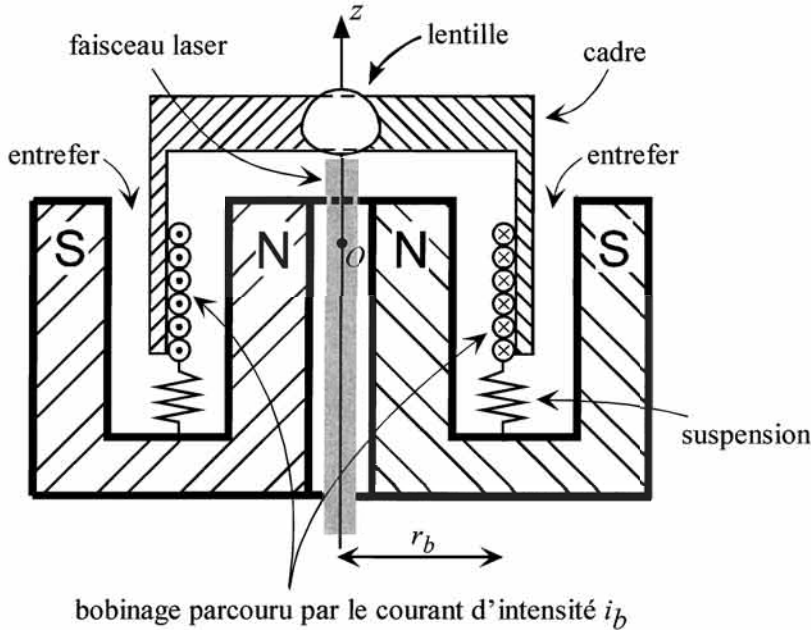


figure 16a

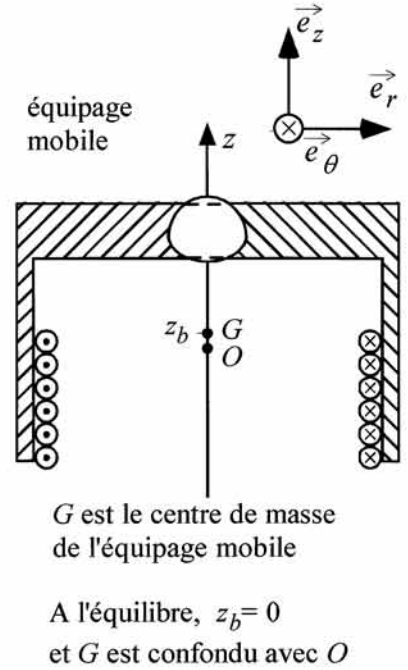


figure 16b

- ◆ **25a-** Donner l'expression de la force qui s'exerce sur l'ensemble des N_b spires parcourues par i_b , en raison du champ magnétique imposé par l'aimant.
- ◆ **25b-** Quel est le nom du physicien associé à la loi donnant cette force ?
- ◆ **25c-** Préciser au cours de quels siècles il a vécu et énoncer deux autres lois de la physique attachées à son nom.
- ◆ **25d-** On repère par z_b la position du centre de masse G du bloc de lecture (figure 16b). On pose $z_b = 0$ à l'équilibre. En précisant la loi utilisée, établir l'équation mécanique vectorielle régissant le mouvement du bloc de lecture. On néglige son poids.
- ◆ **25e-** En déduire l'équation scalaire reliant z_b , $\frac{dz_b}{dt}$, $\frac{d^2z_b}{dt^2}$ et i_b .

La figure 17 donne un aperçu de la configuration du bobinage et de son alimentation modélisée par un générateur idéal de tension, de force électromotrice u_b . Cette force électromotrice donne naissance à un courant i_b , qui provoque un mouvement selon Oz du bloc de lecture, de manière à corriger les défauts de focalisation évoqués précédemment. Pour des soucis de clarté, le nombre de spires n'est pas respecté, et il manque la lentille, son support, et le système de suspension.

On note R_b la résistance électrique de la bobine entre les points A et B . Son auto-inductance est négligeable.

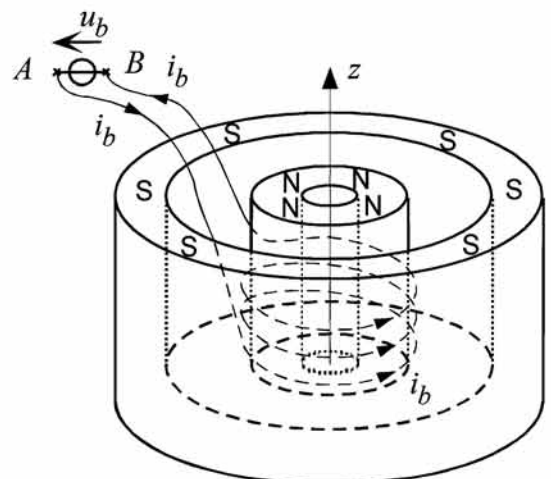


figure 17

- ◆ **26a-** Expliquer qualitativement pourquoi le bobinage est le siège d'un phénomène d'induction.
- ◆ **26b-** Enoncer la loi de Lenz.

- ◆ **26c-** On note $e_{A \rightarrow B}$ la force électromotrice induite dans la bobine, du fait de son mouvement de translation selon Oz . Cette grandeur est algébrique et orientée de A vers B . Compte tenu de la loi de Lenz, $e_{A \rightarrow B}$ doit-elle être positive ou négative lorsque le bobinage est animé d'un mouvement dans le sens des z croissants ? Une réponse justifiée est attendue.
- ◆ **26d-** On rappelle que $e_{A \rightarrow B} = \int_A^B (\vec{v}_b \wedge \vec{B}) \cdot d\vec{\ell}$. Exprimer $e_{A \rightarrow B}$ en fonction de $\frac{dz_b}{dt}$, r_b , N_b et B_0 . On pourra assimiler la portion AB du circuit à N_b spires circulaires et négliger les autres contributions.
- ◆ **26e-** L'auto-inductance de la bobine étant négligée, représenter le schéma équivalent du circuit électrique modélisant le bobinage associé à son alimentation, en y faisant apparaître le courant i_b .
- ◆ **26f-** Ecrire l'équation électrique correspondant à ce schéma équivalent.

On se place en régime harmonique de pulsation ω , et on adopte la notation complexe : par exemple $\underline{u}_b = \underline{U}_b e^{j\omega t}$, où \underline{U}_b est l'amplitude complexe de la tension d'alimentation, et $j^2 = -1$.

- ◆ **27a-** A l'aide de l'équation électrique et de l'équation mécanique, définir puis exprimer l'impédance complexe totale \underline{Z}_b de l'actuateur électromécanique, formé du bloc de lecture et de l'aimant.
- ◆ **27b-** Cette impédance se décompose en deux termes, l'un constituant l'impédance électrique et l'autre ce que l'on appelle une impédance motionnelle. Donner l'expression de ce second terme et expliquer l'origine de son nom.

B) Lecture de l'information

Dans un CD réalisé par pressage, l'information est codée sous forme de « creux » et de « plats ». Les creux ont une profondeur h_c et une largeur plus faible que le diamètre du spot laser. La lumière qui se réfléchit au fond d'un creux a plus de chemin à parcourir dans le polycarbonate que celle qui se réfléchit sur la zone qui borde le creux, c'est-à-dire sur le plat.

On donne $h_c = \frac{\lambda_{poly}}{4}$, λ_{poly} étant la longueur d'onde dans le polycarbonate de l'onde émise par la diode laser. On peut se référer à la figure 18 et on note λ_0 la longueur d'onde dans le vide de l'onde émise par la diode laser.

Pour simplifier, le faisceau laser qui parvient sur le CD est ici assimilé à une onde plane progressive monochromatique. Elle éclaire les creux et les plats de la couche métallique en incidence normale.

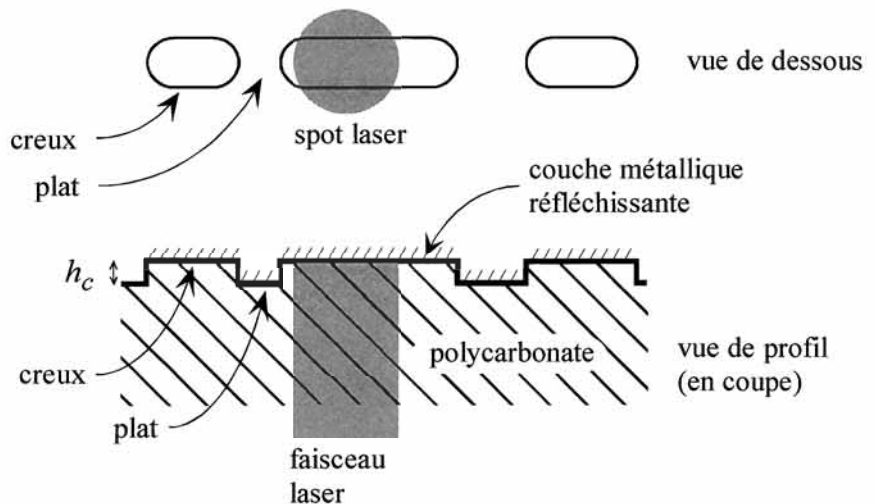


figure 18

Lorsque le spot laser est en face d'un creux, il y a interférence entre la partie de l'onde qui se réfléchit sur le plat et celle qui se réfléchit sur le creux.

- ◆ **28a-** Quel est le lien entre λ_{poly} , λ_0 et l'indice optique n du polycarbonate ?

- ◆ **28b-** Quelle est la différence de chemin optique δ à l'infini entre les ondes qui se réfléchissent sur un creux et celles qui se réfléchissent sur un plat ?
- ◆ **28c-** En déduire que les ondes qui se réfléchissent sur un creux sont en opposition de phase avec celles qui se réfléchissent sur un plat.

Lorsque le spot laser est entièrement en face d'un plat, l'éclairement est maximal. Il est minimal, par interférence destructive, lorsque le spot laser est en face d'un creux. Ainsi, l'éclairement fluctue à mesure que la piste défile devant le spot laser.

Partie V : Mise en rotation du disque et frottements

Cette partie est consacrée à l'évaluation du couple de freinage dû aux frottements de l'air sur le disque.

Écoulement 1D

Avant d'étudier l'interaction entre l'air et le disque en rotation, considérons un problème plus simple : un écoulement de Couette plan.

Une plaque rectangulaire d'épaisseur h selon l'axe vertical Oz , a de très grandes dimensions selon Ox et Oy . Elle est en mouvement de translation horizontale rectiligne uniforme selon Ox , avec une vitesse $\vec{v}_p = v_{p0} \vec{e}_x$. On donne $v_{p0} = 5,00 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$.

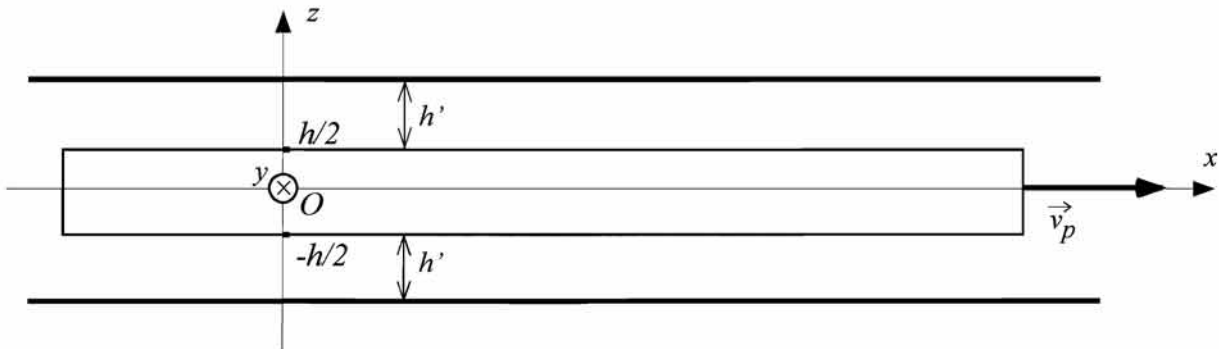


figure 19

Elle se déplace entre deux parois planes d'abscisses verticales respectives $-\left(\frac{h}{2} + h'\right)$ et $\left(\frac{h}{2} + h'\right)$. Ces deux parois sont fixes dans le référentiel d'étude \mathcal{R}_0 , supposé galiléen.

La figure 19 donne un aperçu de la situation ainsi modélisée. On prendra $h' = 1,50 \text{ mm}$.

L'air, de masse volumique $\mu_a = 1,20 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$, est considéré comme un fluide newtonien, de viscosité dynamique $\eta_a = 1,80 \cdot 10^{-5} \text{ Pl}$.

- ◆ **29a-** Quel est le nom du physicien associé à l'unité de la viscosité dynamique utilisée ci-dessus pour la grandeur η_a ?

- ♦ **29b-** Comment s'exprime cette unité à partir de celles de base du Système International d'Unités ?
- ♦ **29c-** Donner l'expression du nombre de Reynolds de façon générale, en précisant les grandeurs physiques utilisées. Quel est l'intérêt de ce nombre ?
- ♦ **29d-** Evaluer la valeur du nombre de Reynolds dans l'une ou l'autre des 2 zones d'écoulement et conclure sur la nature de l'écoulement.

Le champ des vitesses dans l'air est de la forme $\vec{v}_a(M) = v_x(z) \vec{e}_x$. On rappelle l'équation de Navier-Stokes :

$$\mu_a \left(\frac{\partial \vec{v}_a}{\partial t} + (\vec{v}_a \cdot \text{grad}) \vec{v}_a \right) = - \text{grad} P + \mu_a \vec{g} + \eta_a \Delta \vec{v}_a.$$

\vec{g} représente l'intensité du champ de pesanteur.

Dans le contexte de l'étude, la pesanteur peut être négligée, la pression sera considérée comme uniforme et l'écoulement comme permanent.

- ♦ **30a-** Montrer que $v_x(z)$ vérifie l'équation différentielle $\frac{d^2 v_x}{dz^2}(z) = 0$.
- ♦ **30b-** En déduire les deux lois $v_{x+}(z)$ et $v_{x-}(z)$ respectivement pour les zones $\frac{h}{2} + h' > z > \frac{h}{2}$ et $-\left(\frac{h}{2} + h'\right) < z < -\frac{h}{2}$.
- ♦ **30c-** On considère une surface élémentaire $d^2S = dx dy$ de la partie supérieure (en $z = h/2$) de la plaque mobile. Quelle est la force élémentaire de frottement \vec{d}^2F_+ exercée par l'air sur l'élément de surface d^2S ?
- ♦ **30d-** Déterminer de la même façon la force élémentaire de frottement \vec{d}^2F_- exercée par l'air sur un élément de surface d^2S de la partie inférieure de la plaque.

Écoulement 3D

Considérons à présent le lecteur de disques optiques numérisés schématisé dans la figure 20.

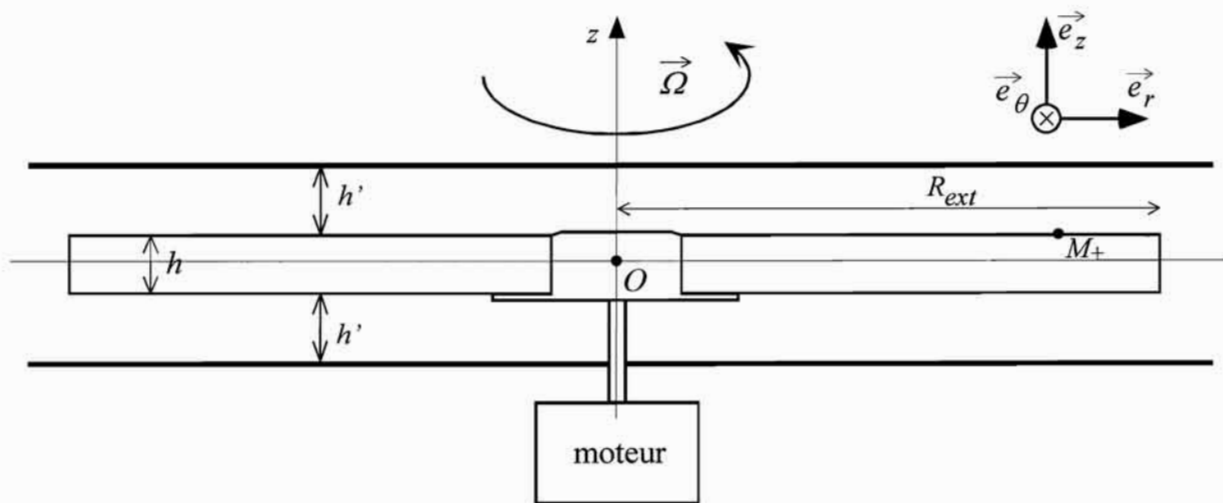


figure 20

Le référentiel d'étude est \mathcal{R}_0 , lié au boîtier du lecteur. Il est supposé galiléen. Le disque, de hauteur h et de rayon $R_{ext} = 6,00$ cm, est animé d'une vitesse angulaire constante $\vec{\Omega} = \Omega_0 \vec{e}_z$. L'air est à nouveau considéré comme un fluide newtonien.

- ♦ **31a-** Déterminer la vitesse \vec{v}_{M_+} d'un point M_+ de coordonnées cylindriques $(r, \theta, \frac{h}{2})$, appartenant à la face supérieure du disque.

Dans un modèle très simplifié, le champ des vitesses dans l'air peut être considéré comme stationnaire et s'écrire ici sous la forme : $\vec{v}_a(M) = v_\theta(r, z) \vec{e}_\theta$.

- ♦ **31b-** En utilisant le résultat de la question **30c**, et en étant attentif à la nouvelle géométrie du système, évaluer, dans le cadre d'un modèle très simplifié, la force élémentaire de frottement $\vec{d}^2 F_+$ exercée par l'air sur un élément de surface $d^2 S = r dr d\theta$ de la partie supérieure du disque, située à une distance r de l'axe de rotation.
- ♦ **31c-** Déterminer le moment du couple dû aux frottements de l'air sur les deux faces du disque (on néglige la très légère surépaisseur due à la présence du moyeu dans la zone centrale du disque).
- ♦ **31d-** Montrer que ce moment peut se mettre sous la forme $\vec{\Gamma}_{frott} = -\alpha_{frott} \vec{\Omega}$, et exprimer α_{frott} en fonction de η_a , R_{ext} et h' .
- ♦ **31e-** Calculer α_{frott} pour $h' = 1,50$ mm et $R_{ext} = 6,00$ cm.

L'écoulement est en réalité plus complexe que celui pris en compte dans le modèle adopté ici. Il existe en effet des recirculations, comme celles que l'on peut observer dans une tasse de thé après avoir remué avec une cuiller. Dans l'introduction d'un article de 1926 sur la formation des méandres d'un fleuve, Albert Einstein donne une explication de ces recirculations, responsables de l'accumulation des feuilles de thé au centre de la tasse.

L'article s'intitule « Die Ursache der Mäanderbildung der Flußläufe und des sogenannten Baer'schen Gesetzes », Die Naturwissenschaften, vol. 14 (« La cause de la formation des méandres sur les cours d'eau et la loi de Baer »).