

Epreuve écrite de physique

Proposition de corrigé

Première partie - Tension de surface

1.1 Notion de tension de surface - Loi de Laplace

1. A l'équilibre de phase, les molécules ont le même potentiel chimique dans le volume des deux phases : elles sont donc également heureuses. Ce sont uniquement les molécules proches de l'interface, sur une épaisseur de quelques tailles moléculaires, qui sont "malheureuses".

A l'interface, chaque molécule perd la moitié de l'énergie de cohésion, soit $k_B T/2$, et occupe une aire $a*a$, avec $a \sim 1$ nm. On en déduit : $\gamma \sim k_B T/(2a^2)$ soit $\gamma \sim 2$ mJ \cdot m⁻². La tension de surface de l'eau est sensiblement plus élevée en raison des liaisons hydrogène entre molécules d'eau.

NB : l'unité usuelle est le mN \cdot m⁻¹, qui n'est autre que le mJ \cdot m²!

2. Prenons un rectangle dont les côtés ont les longueurs a et b . La force capillaire qui s'exerce sur le côté b a pour norme $b\gamma$. Quand a augmente de da , son travail est $dW = (b\gamma)da = \gamma dA$.

γ apparaît comme le travail qu'il faut fournir pour augmenter l'aire de l'interface d'une surface unité : on retrouve la définition "énergétique" de γ . D'un point de vue thermodynamique, cette variation d'énergie est une variation d'énergie libre.

3. La projection sur Oz des deux forces non représentées qui s'exercent sur les côtés courbés de (S) est nulle. Les deux forces représentées ont la même projection, qui vaut

$$F_z = \gamma dl \sin(d\theta/2) = -\frac{1}{2}\gamma dl d\theta.$$

4. En plus des forces de tension superficielle, s'exercent sur (S) des forces de pression de part et d'autre de l'interface. L'aire de (S) vaut $dl R d\theta$. En projection sur Oz , l'équation d'équilibre pour (S) s'écrit :

$$-P_1 dl R d\theta + P_2 dl R d\theta - 2F_z,$$

$$\text{soit } P_2 - P_1 = \frac{\gamma}{R}.$$

5. Si S est une portion de sphère, les quatre forces capillaires élémentaires s'exerçant sur (S) ont une projection non nulle sur Oz , il y a donc quatre forces élémentaires identiques à prendre en compte au lieu de deux.

6. Dans une goutte d'eau de rayon 1 mm, $P_{eau} = P_{atm} + 140$ Pa. L'écart relatif de pression est donc de l'ordre du pour mille, ce qui justifie que les effets de tension de surface soient souvent passés sous silence. Dans l'expression de la loi de Laplace ci-dessus, le milieu d'indice 2 est le côté du centre de courbure. Pour une bulle de gaz, on a donc encore : $P_{gaz} = P_{eau} + 140$ Pa.

7. Dans le cas de la bulle de savon, les sauts de pression s'ajoutent. Pour $R = 1$ cm, on trouve $P_{bulle} - P_{atm} \simeq 8$ Pa.

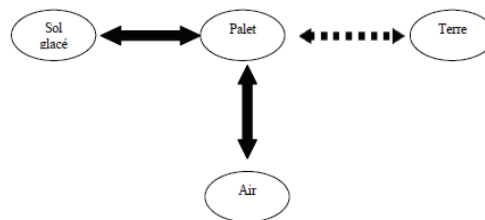
1.2 Questions liées à l'enseignement de la mécanique et de l'hydrostatique au lycée

8. Notion de force en seconde

- *Analyse des erreurs des élèves* :
 - Dans son début d'analyse, l'élève 1 confond "force" et "vitesse". Il confond également "force" et "objet interagissant" puisqu'il cite l'air et la glace dans le même inventaire que la force de pesanteur.
 - L'élève 2 n'identifie pas d'action pouvant venir du support, de plus, le fait qu'il y ait un mouvement, sans intervention visible d'un opérateur lui fait imaginer une "descente".
 - L'élève 3 a une idée plus précise des actions exercées sur le palet, il parle même de compensation, sans apporter de justification, mais la vitesse donnée initialement par l'opérateur et conservée par le mobile est interprétée comme une force.

Globalement ces erreurs sont très classiques, notamment la confusion entre force et vitesse. En effet, l'idée d'élan, "d'impetus" qui entreprendrait le mouvement grâce à une force utilisée initialement exercée reste très fortement ancrée.

- *Intérêt du diagramme objet-interaction* : Le diagramme objet-interaction est bon outil pour dissocier force et vitesse et mieux identifier les objets interagissant et ensuite modéliser les interactions par une force. Le palet interagit avec trois objets que les élèves parviennent sans difficulté à identifier : la Terre, le support recouvert de glace et l'air. On peut ainsi représenter le diagramme suivant pour cette situation : Trois objets interagissent avec le palet. Chaque interaction sera modélisée par une force : le poids, l'action du support et les frottements de l'air. Dans ce schéma d'analyse on voit bien que la vitesse ne peut faire partie de l'inventaire. On limite donc les risques de confusion.



- *Solution complète*
 Les arguments que les élèves peuvent apporter pour affiner les caractéristiques des forces sont les suivants : Le mouvement observé par rapport à la patinoire (référentiel terrestre) est uniforme et rectiligne. En utilisant le principe d'inertie appliqué au palet, on peut conclure que tout se passe comme si aucune force ne s'exerçait sur le palet. Or on vient de voir qu'il y avait trois forces à inventorier. Il est donc plus probable que la force exercée par l'air soit très faible et ne modifie pas visiblement la vitesse. Le poids et la réaction du sol glacé se compenseraient alors, cette dernière force étant alors verticale.

9. Hydrostatique en STI2D

- Situation 1

Exemple de question possible : les deux plongeurs évoluent dans une eau de mer homogène et dont la composition identique. Comparer les pressions exercées sur la tête de chacun des deux plongeurs (ou poissons si le plongeur est indésirable!). Donner des arguments pour justifier votre réponse.

Réponse : la pression est la même puisque ces deux plongeurs sont supposés évoluer à la même profondeur dans une eau de la même densité.

Erreur fréquente : les élèves utilisent le modèle de "la foule" et imaginent que le plongeur peut être "comprimé" localement par la manque d'espace. Cette erreur

peut être compensée par une autre erreur : le confinement est horizontal n'a pas d'effet sur la force verticale subie par le plongeur. Il faut donc insister sur le fait que la pression dans un liquide est une grandeur isotrope.

– Situation 2

Exemple de question possible : Comparer les pressions exercées sur la tête de chacun des deux plongeurs.

Réponse : la pression est la même puisque ces deux plongeurs sont supposés évoluer à la même profondeur.

Erreurs fréquentes : la confusion entre force pressante et pression peut amener les élèves à faire jouer un rôle au bateau qui par son poids exercé au-dessus de la tête du plongeur (a), imposerait une "force supplémentaire" sur la tête de ce plongeur. Même chose pour le poids du rocher en surplomb pour le plongeur (c). Ici encore, l'isotropie de la pression est un argument à opposer à cette "force supplémentaire" qui est verticale dans l'esprit des élèves.

10. Bilan des forces : poids $\vec{P} = dxdydz \rho \vec{g}$ et une force de pression sur chaque élément de surface. En projection sur l'axe Ox , le bilan s'écrit :

$$(P(x_M - dx/2, y_M, z_M) - P(x_M + dx/2, y_M, z_M)) dydz = 0, \text{ soit } \frac{\partial P(M)}{\partial x} = 0.$$

Même chose pour la direction Oy .

En projection sur Oz :

$$(P(x_M, y_M, z_M - dz/2) - P(x_M, y_M, z_M + dz/2)) dxdy - \rho g dxdydz = 0,$$

$$\text{soit } \frac{\partial P(M)}{\partial z} = -\rho g.$$

En définitive : $\vec{\text{grad}}P = \rho \vec{g}$.

11. La surface libre est une équipotentielle du champ de pesanteur. Dans l'hypothèse où \vec{g} est uniforme, les équipotentielles sont les plans perpendiculaires à \vec{g} , c'est à dire horizontaux.
12. La pression hydrostatique dépend des paramètres ρ ($M \cdot t^{-3}$) et g ($L \cdot s^{-2}$), et les forces capillaires de γ ($M \cdot t^{-2}$). Dimensionnellement, $L_C \sim \rho^a g^b \gamma^c$, d'où $L_C \sim \gamma^{1/2} (\rho g)^{-1/2}$. Plus physiquement, on peut dire que, à l'échelle L_C , les forces de pression capillaire ($\sim \gamma/L_C$) sont du même ordre que les forces de pression hydrostatique ($\sim \rho g L_C$).
13. – La forme est hémisphérique si, *dans le tube*, l'effet de la gravité sur la forme du ménisque est négligeable. Il faut donc que la dimension du tube soit petite devant L_C .
- La pression dans le gaz est partout P_{atm} . D'après la loi de Laplace, la pression dans le liquide en haut du tube est $P_t = P_{atm} - 2\gamma/r$. La pression dans le liquide au niveau de la surface libre horizontale est égale à P_0 .
- La loi de l'hydrostatique donne alors $P_{atm} - P_t = \rho g H$, d'où la loi de Jurin : $H = \frac{2\gamma}{\rho g r}$
- Application numérique : $H = 0,14$ m.

1.3 Pression de la sève montante dans les arbres

14. D'après la loi de Jurin, en prenant un rayon de $10 \mu\text{m}$, la sève peut monter à 1,4 mètres de hauteur par capillarité.
15. La pression atmosphérique P_{atm} restant constante, la loi de Laplace impose que $R = 2\gamma / (P_{atm} - P_{sève})$. Si la pression de la sève diminue, le ménisque se creuse et R diminue

progressivement jusqu'au moment où le ménisque est hémisphérique, soit $R = r_S$. Si on diminue encore la pression de la sève, le rayon de courbure ne peut plus diminuer et l'air va envahir le vaisseau.

16. La sève se trouve à la pression P_m quand $R = r_S$, soit $P_m = P_0 - 2\gamma/r_S$. Si le rayon des stomates est très petit, P_m peut être négatif! C'est le cas si $r_S = 20$ nm, on trouve alors $P_m \simeq -7$ MPa, -70 fois la pression atmosphérique.

17. Si l'écoulement de sève dû à l'évaporation a un effet négligeable sur la pression, la variation de la pression avec la hauteur z est alors purement hydrostatique. Si la pression de la sève vaut $P_0 \simeq 0.1$ MPa au niveau du sol ($z = 0$), la pression de la sève vaut alors : $P = P_0 - \rho g z$.

Soit $P = -0.1$ MPa 20 mètres du dessus du sol, à la cime de l'arbre. La pression est négative, mais elle est très supérieure au seuil de l'embolie -7 MPa. Le vaisseau est donc stable vis à vis de l'embolie.

18. Le modèle est évidemment faux, car si la variation de pression était uniquement un effet hydrostatique, elle serait la même pour toutes les espèces. Plus précisément, la pression devrait varier linéairement avec z et atteindre $-0,2$ MPa à 20 m. On constate donc que le modèle est à peu près juste pour *Schefflera* mais complètement faux pour *Thuja*.

Les paramètres du modèle hydrostatique sont très peu nombreux. La gravité est au dessus de tout soupçon, mais on peut douter que la sève soit de l'eau pure. Cependant, il faudrait qu'elle soit beaucoup plus dense que l'eau pour expliquer l'écart numérique. D'autre part, la pression devrait être la même pour toutes les branches. Si le modèle hydrostatique est faux, cela signifie que l'eau s'écoule et que la perte de charge associée à l'écoulement est plus importante que la chute de pression hydrostatique. Cette perte de charge dépend beaucoup du réseau vasculaire (ramifications, diamètre des vaisseaux...) ce qui induit une grande variabilité.

19. Comme écrit dans le premier encadré (question 1), il existe des interactions attractives importantes entre molécules dans les liquides, qui sont responsable de leur cohésion. Ces interactions font que les liquides peuvent résister à une tension. Evidemment, si cette tension est trop importante, le liquide "se rendra compte" qu'il est plus favorable pour lui de passer en phase vapeur, mais cette transformation demande de passer une barrière d'énergie (voir la partie suivante).

Deuxième partie - transition liquide-vapeur

2.1 Transitions de phase au collège et au lycée

20. Diagramme de phase

Le programme officiel de la classe de cinquième cite parmi les connaissances à acquérir : "un palier de température apparaît lors du changement d'état d'un corps pur".

- Expérience : mesurer en fonction du temps la température de l'eau quand on apporte de la chaleur à cette eau. En classe, cette expérience se fait avec un récipient ouvert, ce qui impose que la pression est constante et est égale à la pression atmosphérique. De manière générale, on n'observe de palier de température que si la pression est constante.

- La température du palier dépend évidemment de la pression, et éventuellement de la présence d'impuretés dissoutes. Dans ce second cas, on n'observe pas de plateau au sens strict. La pression atmosphérique est susceptible de varier en fonction des conditions météorologique et de l'altitude. L'impact est important pour la transition liquide-gaz. Pour des conditions anticycloniques, $P \simeq 1020$ hPa et pour une dépression $P \simeq 990$ hPa, ce qui donne, d'après les valeurs numériques données en début de sujet une variation de température de l'ordre de 1°C , pas très facile à mettre en évidence; en revanche, l'effet de l'altitude est notable. La pression atmosphérique à 1000 m est de l'ordre de 900 hPa, soit une température d'ébullition de l'ordre de $96,5^\circ\text{C}$. L'impact est en revanche beaucoup plus faible pour la transition entre deux phases condensées dont le potentiel chimique dépend faiblement de la pression.
- La proposition "l'eau est liquide en dessous de 100°C " est pleine de sous-entendus. Il faudrait dire : si on prend un récipient fermé qui ne contient que de l'eau et que ce récipient est à pression atmosphérique alors l'eau sera sous forme liquide tant que la température est inférieure à 100°C . C'est réalisable dans une bouteille souple remplie à ras-bord et fermée : on n'observe pas de vaporisation. Il peut y avoir évaporation à toute température s'il y a un espace libre, a fortiori si le récipient est ouvert. En revanche, on observe bien qu'il se passe quelque chose de singulier à 100°C : il se forme des bulles *au sein* du liquide. Le liquide "préfère" donc se transformer en gaz au dessus de 100°C .
- Si l'on enferme un gaz dans un récipient déformable, quand on diminue le volume, la pression augmente jusqu'à ce qu'elle atteigne la pression de vapeur saturante. Si on continue à diminuer le volume, le gaz se condense à pression constante. Quand la condensation est complète, la pression se remet à augmenter.

21. Chaleur latente

- On appelle chaleur latente (massique ou molaire) de vaporisation d'un corps pur à la température T la variation d'enthalpie (de l'unité de masse ou d'une mole) de ce corps passant de l'état liquide à l'état gazeux.
- L'échange de chaleur est un des moyens de changer l'énergie interne d'un système mais, suivant le type de transformation choisie, on peut passer d'un état à un autre en échangeant plus ou moins de chaleur. Ici, on s'intéresse au changement d'état d'un corps pur qui s'effectue à température et donc à pression constante. La chaleur échangée à pression constante s'identifie à la variation d'enthalpie et donc à la variation d'une fonction d'état qui est définie de manière univoque dès que les états initial et final sont connus.

22. Séance de travaux pratiques en première S

(a) Correction détaillée aux questions de la partie **Exploitation individuelle**

- 1. On place les glaçons dans de l'eau afin que la température initiale des glaçons soit 0°C .
- 2. La masse d'eau m_i a une capacité thermique $m_i c$. L'énergie cédée est : $E_C = m_i c (T_i - T_{min}) = 11,63$ kJ (les valeurs mesurées sont données avec 2 ou 3 chiffres significatifs, on en garde 4 pour les calculs intermédiaires).
- 3. Si le contenu du calorimètre est parfaitement isolé, alors l'énergie reçue E_R par les glaçons est égale à l'énergie cédée E_C .
- 4. La masse ne change pas lors d'un changement d'état : la masse d'eau m_2 formée par la masse des glaçons est égale à la masse des glaçons m_g . Quand cette eau passe de 0°C à T_{min} , elle reçoit $m_g c (T_{min} - 0) = 978,1$ J.

- 5. L'énergie reçue est égale à la somme de l'énergie E_f utilisée pour la fusion et de $m_g c(T_{min} - 0)$. Sachant que $E_C = E_R$, on obtient $E_f = m_i c(T_i - T_{min}) - m_g c(T_{min} - 0) = 11630 - 978,1 = 10650 \text{ J}$.
- 6. $\Delta h_f = E_f / m_g = 296 \text{ J} \cdot \text{g}^{-1}$.

(b) Analyse des résultats

- L'ensemble des valeurs a comme valeur moyenne 297 J/g et comme écart type 12 J/g .
- 2. L'écart relatif entre les groupes est donc de l'ordre de 4%. Le protocole étant le même pour tous les groupe, la dispersion des résultats est sans doute due aux incertitudes de mesure (une erreur de $0,5^\circ\text{C}$ sur T_{min} suffit pour avoir une incertitude 2,5% sur le résultat final.
- 3. Si on fait confiance au protocole et aux hypothèses utilisées dans l'analyse des résultats, l'incertitude est due uniquement à des erreurs aléatoires. Alors la valeur moyenne donne une estimation de Δh_f , et l'écart type donne une estimation de l'incertitude, on en déduit $\Delta h_f = 300 \pm 10 \text{ J} \cdot \text{g}^{-1}$. On peut améliorer l'estimation de l'incertitude en divisant l'écart type par la racine du nombre de points de mesure.
- 4. La valeur tabulée est incompatible avec la valeur précédente. Le protocole et/ou les hypothèses conduisent à une erreur systématique (ou biais). On peut suspecter : l'hypothèse que le calorimètre est parfaitement isolant (la dérive de la température aux temps longs prouve le contraire), le fait qu'on a négligé la capacité thermique du calorimètre, le fait que les glaçons peuvent être partiellement fondus en surface. On remarque d'ailleurs que tous ces points vont dans le même sens et conduisent à sous estimer Δh_f .

(c) L'intérêt de ce TP est d'utiliser concrètement un bilan énergétique pour en tirer une valeur utile. D'un point de vue expérimental, on sait que ce genre de mesure est en réalité délicate et qu'on peut trouver des valeurs très éloignées de la valeur attendue. C'est donc un TP idéal pour dépasser l'analyse minimale des résultats où on se borne à calculer la dispersion des mesures, et où cette dispersion fournit une estimation de l'incertitude. Après la question D4, il faudrait donc initier une vraie discussion, dont les termes pourraient être :

- vérifier que la dispersion est bien compatible avec les erreurs aléatoires sur les mesures de températures et de masses.
- chercher les faiblesses du protocole pour cerner les sources de biais. Il est dommage de ne pas faire tracer $T(t)$ et de ne pas faire remarquer la dérive.
- proposer d'optimiser/corriger ce protocole : bien choisir la température initiale pour minimiser les échanges avec l'extérieur, choisir un rapport masse de glaçon/masse d'eau initial le plus élevé possible, estimer la capacité thermique du calorimètre, etc.

(d) Au sens strict, on ne peut rien dire de la précision avec les données dont on dispose puisqu'on ne connaît pas la précision des appareils utilisés. Visiblement la résolution en température est de $0,5^\circ$, ce qui conduit déjà à une incertitude de 2,5% comme dit plus haut. Pour des améliorations, cf discussion précédente.

(e) Cette méthode est difficilement applicable à une transformation liquide vapeur : travailler avec un gaz implique d'avoir un calorimètre étanche. Ce calorimètre devrait de plus être déformable pour assurer que la pression reste constante lors de la vaporisation du liquide introduit.

2.2 thermodynamique de la transition liquide-vapeur

23. L'ensemble $\mathcal{S} \cup \mathcal{R}$ est isolé : son entropie S_{tot} augmente lors d'une transformation spontanée.

On a : $\Delta S_{tot} = \Delta S + \Delta S_{\mathcal{R}}$ avec $\Delta S_{\mathcal{R}} = -Q/T_0$ où Q est la chaleur reçue par \mathcal{S} lors de la transformation.

Par ailleurs : $Q = \Delta U - W$, où W est le travail reçu par \mathcal{S} . Ici $W = -P_0\Delta V$.

Il vient : $\Delta S_{tot} = \Delta S - \frac{1}{T_0}\Delta U - \frac{P_0}{T_0}\Delta V$;

On en déduit : $\Delta\Phi = -T_0\Delta S_{tot}$, d'où Φ décroît lors d'une transformation spontanée. C'est le potentiel thermodynamique pour \mathcal{S} .

24. Seules les N moles qui passe de l'état gaz à l'état liquide subissent une transformation. D'après l'expression de $\Delta\Phi$:

$$\Delta\Phi = U_L(T_0, P_1, N) - U_G(T_0, P_0, N) - T_0[S_L(T_0, P_1, N) - S_G(T_0, P_0, N)] + P_0(V_1 - V_0)$$

avec des notations évidentes : l'indice pour U et S indique la phase considérée. Pour alléger l'écriture, on omet parfois dans la suite les variables T_0 et N qui sont les mêmes pour toutes les fonctions.

En regroupant les termes, et en ajoutant $(P_1V_1 - P_1V_1) = 0$, il vient :

$$\Delta\Phi = [U_L(P_1) - T_0S_L(P_1) + P_1V_1] - [U_G(P_0) - T_0S_G(P_0) + P_0V_0] + (P_0 - P_1)V_1$$

qui est l'expression demandée. En ajoutant la contribution de l'interface :

$$\Delta\Phi = G_L(T_0, P_1, N) - G_G(T_0, P_0, N) + (P_0 - P_1)V_1 + \gamma A$$

25. Pour le liquide incompressible : $\left. \frac{\partial\mu_L}{\partial P} \right|_T = V_L$, avec V_L constant. Par intégration :

$$\mu_L(T_0, P_1) = \mu_L(T_0, P_V) + V_L(P_1 - P_V).$$

Pour le gaz, supposé parfait : $\left. \frac{\partial\mu_G}{\partial P} \right|_T = V_G = \frac{RT}{P}$. Par intégration :

$$\mu_G(T_0, P_0) = \mu_G(T_0, P_V) + RT_0 \ln(P_0/P_V)$$

26. Pour passer à l'enthalpie libre, on utilise le fait que $G = \mu N$, avec $N = \frac{(4/3)\pi R^3}{V_L}$. On injecte les expressions de G_L et G_G dans celle de $\Delta\Phi$. Il vient :

$$\Delta\Phi = \frac{(4/3)\pi r^3}{V_L} [V_L(P_0 - P_V) - RT_0 \ln(P_0/P_V)] + 4\pi r^2\gamma$$

où on a utilisé le fait que, à la pression d'équilibre P_V , $\mu_L(T_0, P_V) = \mu_G(T_0, P_V)$.

27. Parmi les hypothèses, on a supposé que les variations relatives de pressions par rapport à P_V sont petites. On en déduit : $\frac{RT_0}{V_L} \ln\left(\frac{P_0}{P_V}\right) \approx \frac{RT}{V_L P_V}(P_0 - P_V) = \frac{V_G P_0}{V_L P_V}(P_0 - P_V) \approx \frac{V_G}{V_L}(P_0 - P_V)$, où V_G est le volume molaire du gaz. Loin du point critique, $V_G \gg V_L$ et le second terme est bien dominant par rapport au premier dans l'expression de $\Delta\Phi$.

Remarque : dans beaucoup de situations, V_G est tellement grand devant V_L que cette approximation est très robuste, même si on s'écarte beaucoup de la pression de coexistence P_V .

28. $\Delta\Phi$ est donc de la forme $\alpha r^3 + \beta r^2$. β est toujours positif. $\alpha > 0$ si $P_0 < P_V$ et $\alpha < 0$ si $P_0 > P_V$. L'état thermodynamiquement stable correspond à Φ minimum. Si $P_0 < P_V$, ce minimum correspond à $r = 0$: il n'y a pas condensation, le système reste dans la phase gaz qui est stable. Si $P_0 > P_V$, le minimum est atteint pour $r \rightarrow \infty$, c'est à dire quand la gouttelette liquide a envahi tout le système : c'est la phase liquide qui est stable.

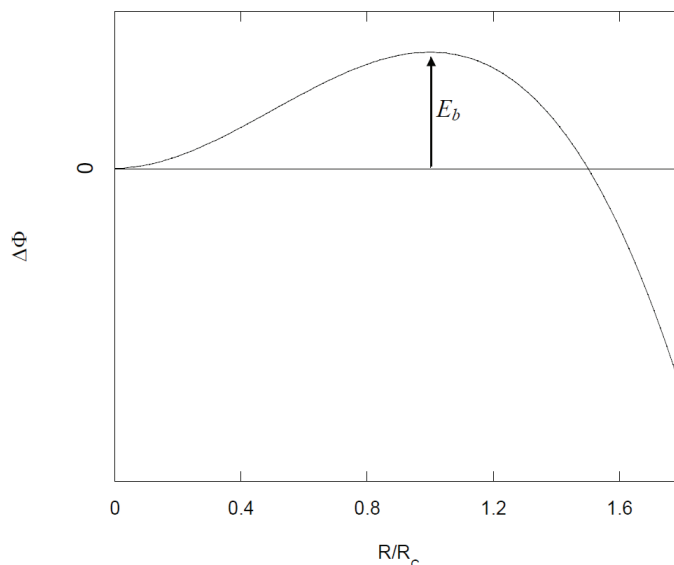


FIGURE 1 – $\Delta\Phi$ en fonction du rayon de la gouttelette liquide. Pour $P_0 > P_V$, le minimum de $\Delta\Phi$ correspond à la phase liquide ($r \rightarrow \infty$), mais cet état ne peut être atteint qu'en franchissant la barrière de potentiel E_b .

Ce résultat était prévisible : dans un diagramme de phase dans les coordonnées (T, P) , la phase liquide est toujours au dessus de la courbe de coexistence.

29.
$$r_C = 2 \frac{\gamma V_L}{R T_0} \frac{1}{\ln \frac{P_0}{P_V}}.$$
30. Partant de l'état {vapeur + goutte de liquide de rayon r }, le système évolue dans le sens qui minimise Φ . Si $r < r_C$, le système revient dans l'état initial (vapeur uniforme). Si $r > r_C$, la goutte grossit jusqu'à envahir le système : il y a condensation. Le système est donc initialement dans un état métastable qui correspond à un minimum local de son potentiel. Il ne peut atteindre le minimum absolu (état liquide) que si une fluctuation thermique lui permet de franchir la barrière énergétique.
31.
$$E_b = \frac{16\pi}{3} \frac{\gamma^3 V_L^2}{R^2 T_0^2} \frac{1}{\left(\ln \frac{P_0}{P_V}\right)^2}.$$
32. Pour que le système se liquéfie entièrement, il faut que lors d'une fluctuation se crée une goutte de rayon r_C . La probabilité qu'une fluctuation porte le système dans un état d'énergie E_b au dessus de son état d'équilibre est proportionnelle à $\exp(-E_b/k_B T)$ (la constante multiplicative dépend de la taille du système et de la fréquence avec laquelle le système explore l'espace des configurations).
33. Expérimentalement, on trouve que $\ln(P r)$ décroît linéairement avec $\frac{1}{[\ln(P_0/P_V)]^2}$, comme attendu. Le coefficient directeur vaut environ 470 en valeur absolue. D'après le

modèle précédent, on attend que ce coefficient vaille : $\frac{16\pi}{3} \frac{\gamma^3 V_L^2}{R^2 T_0^2 k_B T_0} \approx 800$. L'ordre de grandeur est correct, mais la mesure est sensiblement différente de la prédiction. En définitive, le modèle prévoit correctement comment varie la hauteur de la barrière avec l'écart à l'équilibre, mais ne donne qu'une valeur approximative de cette barrière.

34. Il est courant d'observer un retard lors d'une transition liquide \rightarrow solide. En enregistrant la température en fonction du temps lors du refroidissement, on dépasse souvent transitoirement le palier de solidification. On en trouve des illustrations spectaculaires sur internet. Ce retard est d'ailleurs mis à profit dans des dispositifs commerciaux utilisés pour se réchauffer.

Partie C - l'eau metastable

3.1 dualité onde-corpuscule en classe de terminale S

35. Aux 18^{ème} et 19^{ème} siècles s'est imposé le caractère ondulatoire de la lumière. Il subsiste pourtant deux petits nuages dans le ciel de la physique théorique (l'expression est de William Thomson alias lord Kelvin). L'un d'entre eux est le rayonnement du corps noir. Son étude amènera Max Planck à formuler l'hypothèse en 1900 que les échanges d'énergie entre le rayonnement électromagnétique et le matériau émetteur sont quantifiés. Cette hypothèse est reprise par Einstein en 1905 pour expliquer l'effet photoélectrique. En 1927, à la suite des travaux de Bohr, De Broglie généralise la dualité onde-corpuscule aux particules matérielles.

36. – Un exemple de réponse attendue d'un candidat sous la forme d'une question ouverte :
On peut donner les trois premiers documents et prévoir un document supplémentaire rappelant la relation de de Broglie. Les élèves sont soumis à une seule question ouverte telle que celle-ci : "Exploiter quantitativement ces documents pour montrer que le modèle ondulatoire fournit une interprétation des résultats de cette expérience d'interférence, réalisée avec des molécules de fullerène C60." Des aides seront données aux élèves pour les guider dans leurs calculs et leur suggérer de pratiquer certaines analogies.

– Autre exemple :

On peut aussi procéder différemment en fournissant uniquement le document 2 et 3 et en donnant le temps de réflexion suffisant aux élèves avec toutes les notes de cours (qui n'évoquent pas le fullerène) pour formuler une question que leur suggèrent ces documents. Par exemple : "Comment se comportent les molécules de fullerène dans cette expérience ?" Ensuite une étude quantitative guidée peut être menée, une fois bien identifiée la nature du comportement de ces molécules. Le document 1 et la relation de de Broglie sont ajoutés aux données.

Dans les deux cas, il est préférable de donner le document 4 dans un second temps. Son analyse permet de conforter les résultats obtenus avec un jet thermique et de pousser l'analogie avec la diffraction d'un faisceau optique.

– Exemple de consignes

- Calculer la longueur d'onde associée aux molécules de fullerenes dans l'expérience

La longueur d'onde de de Broglie associée est donnée par la relation $\lambda = \frac{h}{m v_m}$.

Avec une masse $m = 1,2 \cdot 10^{-24}$ kg on trouve $\lambda = 2,8$ pm. Nous pouvons souligner

qu'elle est très petite à l'échelle de la taille de la molécule qui est de l'ordre de 1000 pm.

- Pour l'onde associée aux fullerenes, à quoi correspond un "maximum d'intensité", terme utilisé pour les ondes lumineuses ? Pour quels angles observe-t-on un "maximum d'intensité" ? On détecte des impacts : un maximum d'intensité correspond à un maximum de particules détectées. Ce maximum correspond à un décalage de $35 \mu\text{m}$ par rapport à la direction du faisceau incident, soit un angle $\frac{35 \cdot 10^{-6}}{1,25} = 28 \cdot 10^{-6} \text{ rad.}$

Cet angle est *très petit* ! Cela impose que la dimension transverse du détecteur soit elle aussi très petite pour résoudre les maxima.

- Si l'onde associée aux fullerenes, se comporte comme une onde lumineuse, dans quelles directions doit-on observer un maximum d'intensité ?

Pour $p = 1$, en utilisant la relation du doc. 1, on trouve que l'angle de diffraction vaut $\theta = \lambda/d = 28 \mu\text{rad}$, ce qui est parfaitement cohérent avec la description ondulatoire du faisceau de molécules.

3.2 Diffusion Brillouin

37. Par analogie avec les photons, la quantité de mouvement \vec{p} des phonons est suivant le sens de propagation de l'onde et de norme h/λ . L'énergie est $e = h\nu$ où h est la constante de Planck. La vitesse du son dans l'eau est de 1480 m/s. Pour une fréquence $\nu = 1000 \text{ Hz}$, $\lambda = 1,48 \text{ m}$, $p = 4,48 \times 10^{-34} \text{ kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$ et $e = 6,63 \times 10^{-31} \text{ J}$.
38. La notion d'onde acoustique n'a de sens que dans la limite des milieux continus. Il faut donc que λ soit grand devant la distance moyenne entre molécules, c'est à dire l'angström. Si on prend pour fixer les idées $\lambda = 1 \text{ nm}$, l'énergie correspondante est de l'ordre de 10^{-21} J .
39. La conservation de l'énergie s'écrit : $h\nu_+ - h\nu = hf$ où f est la fréquence du phonon. Pour un photon optique, $\nu \sim 5 \times 10^{14} \text{ Hz}$ et $h\nu \sim 3 \times 10^{-19} \text{ J}$, ce qui est beaucoup plus grand que l'énergie maximum d'un phonon estimée à la question précédente. La variation relative de l'énergie du photon est donc petite.
40. Pour un photon, l'énergie est proportionnelle à la quantité de mouvement. La variation relative de la quantité de mouvement est donc elle aussi petite. La conservation de la quantité de mouvement s'écrit : $\vec{P}_+ - \vec{P} = \vec{p}$.
La traduction graphique est faite ci-dessous :

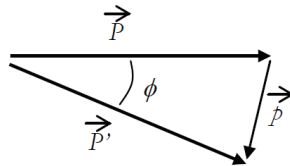


FIGURE 2 -

Si $P \simeq P'$, le triangle ci-dessus est presque isocèle, d'où : $p \simeq 2P \sin(\phi/2)$.

41. La conservation de l'énergie s'écrit : $\nu_+ - \nu = f = \frac{vp}{h}$.

La question précédente donne : $p = 2 \frac{h\nu}{c} \sin(\phi/2)$ avec $c = c_0/n$. On obtient :

$$\nu_+ - \nu = \frac{2n}{\lambda_0} v \sin\left(\frac{\phi}{2}\right) \quad (1)$$

NB : la démonstration de cette relation est faite le plus souvent en se plaçant du point de vue *ondulatoire* : l'onde sonore crée un réseau qui diffracte l'onde lumineuse incidente. C'est le fait que ce réseau est en mouvement qui provoque le changement de fréquence par effet Doppler.

42. La diffusion Brillouin est dite inélastique car l'énergie du photon incident est modifiée. Dans le cas de l'annihilation, les calculs sont identiques et on trouve un décalage opposé.
43. On trouve : $(\nu_+ - \nu) = 5,23 \text{ GHz}$, soit une variation de longueur d'onde $\lambda - \lambda_0 = 4,97 \times 10^{-3} \text{ nm}$.
La résolution nécessaire pour mesurer ce décalage est $\lambda_0/(\lambda - \lambda_0) \sim 10^5$, hors de portée d'un spectromètre à réseau.

3.3 Principe d'un interféromètre de Perot-Fabry

44. La différence de phase entre deux rayons sortants successifs est $2\pi \frac{2e}{\lambda}$ à cause de l'aller et retour dans la cavité. L'ordre d'interférence est $\frac{2e}{\lambda} \sim 10^4$.
45. I_t est maximale quand l'ordre d'interférence est entier, soit e multiple de $\lambda/2$
 $I_t(e)$ est donc périodique de période $\lambda/2$:

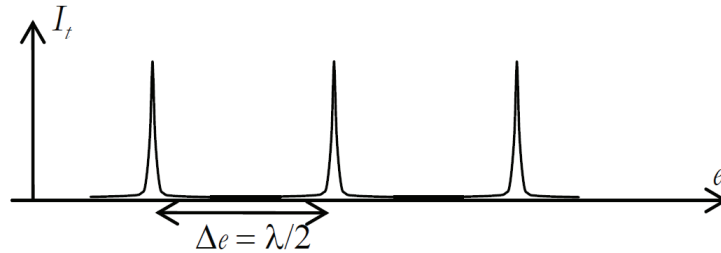


FIGURE 3 –

46. Le pic correspondant à ν' (ordre p) correspond à $e = e_0 + \delta e$. Le pic correspondant à ν (ordre $p \pm 1$) correspond alors à $e = e_0 + \delta e \pm \lambda'/2$. Comme les deux longueurs d'onde sont très proches, la période $\lambda'/2$ des pics correspondants à ν' est très proche de $\lambda/2 = \Delta e$. On obtient donc des groupes de deux pics régulièrement espacés de Δe , la distance entre deux pics dans le même groupe étant δe .

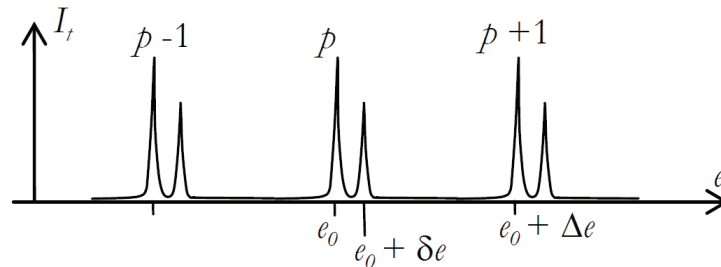


FIGURE 4 – Pour faciliter la compréhension, on a représenté la figure avec des intensités différentes pour les deux fréquences : les grands pics correspondent à ν .

47. Par définition : $e_0 = p \frac{\lambda}{2}$ et $e_0 + \delta e = p \frac{\lambda'}{2}$. Il vient donc : $\delta e = \frac{p}{2}(\lambda' - \lambda)$

En divisant par $\Delta e = \lambda/2$, on obtient : $\frac{\delta e}{\Delta e} = \frac{p}{\lambda}(\lambda' - \lambda)$ Enfin, on élimine p dans cette dernière expression en remarquant que $ISL \equiv \frac{c}{2e_0} = \frac{p\lambda}{c}$ pour obtenir :

$$\frac{\delta e}{\Delta e} = -\frac{\delta \nu}{ISL}. \quad (2)$$

48. Si $\delta \nu > ISL$, alors $\delta e > \Delta e$ et la raie ν' d'ordre p se trouvera entre les raies ν d'ordre $p + 1$ et $p + 2$. Il y a mélange des ordres pour les différentes fréquences, exactement comme un repliement de spectre quand on dépasse la fréquence de Nyquist pour un signal échantillonné. Pour éviter cela, il faut se restreindre à un domaine de fréquence inférieure à ISL , d'où le nom d'intervalle spectral libre. Ceci implique évidemment qu'on a une idée a priori de la valeur de la fréquence à déterminer. Sinon, $\nu' - \nu$ est déterminé modulo ISL .

3.4 Spectroscopie Brillouin

49. A chaque raie élastique ν est associée deux raies Brillouin ν_+ et ν_- qui ont des décalages opposés. Ce décalage est de 5,23 GHz, inférieur à l'ISL qui est de 20 GHz : il n'y a pas de repliement.

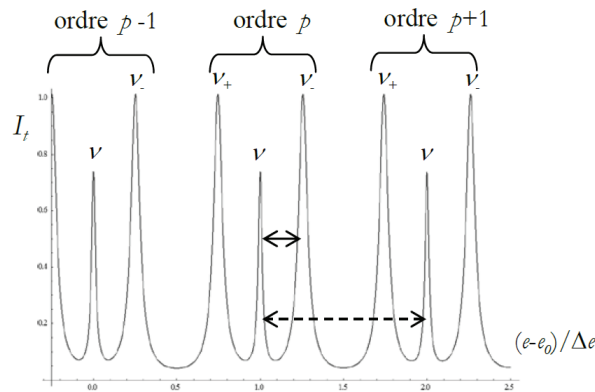


FIGURE 5 – $I_t(e)$. L'ISL de 20 GHz est proportionnel à la flèche en pointillé et le décalage Brillouin est proportionnel à la flèche continue

50. Il y a à présent mélange des ordres :

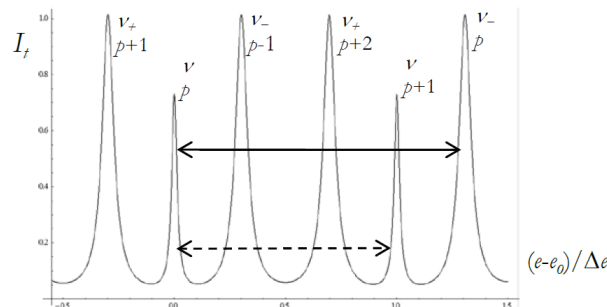


FIGURE 6 – $I_t(e)$. L'ISL de 4 GHz (pointillé) est maintenant inférieur au décalage Brillouin (continu).

51. Les spectres expérimentaux sont très semblables à la figure précédente. En veillant à identifier correctement les raies, on trouve un décalage d'environ 5,25 GHz entre une raie Brillouin (pression ambiante soit 0,1 MPa) et une raie Rayleigh de même ordre. C'est en bon accord avec le résultat de la question ??.
- A la pression de -26 MPa, les raies Brillouin se *rapprochent* de la raie Rayleigh correspondante : le décalage passe de 5,25 GHz à environ 5,15 GHz . D'après l'expression

??, le décalage Brillouin est proportionnel à la vitesse du son v . La variation relative de v est d'environ $-0,1/5,25$ soit -2% .

NB : dans cette estimation, on néglige la variation de l'indice avec la pression...les auteurs de l'article ont en réalité mesuré également la dépendance de l'indice avec la pression pour analyser correctement le spectre Brillouin.

3.5 Equation d'état

52. La vitesse est donnée par : $v = v_0 + k(\rho - \rho_0)$.

La compressibilité (isotherme ou isentropique) s'écrit aussi : $\chi_S = +\frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial P}$. On en déduit une équation différentielle pour $P(\rho)$:

$$v^2 = (v_0 + k(\rho - \rho_0))^2 = \frac{1}{\rho \chi} = \frac{\partial P}{\partial \rho}$$

NB : ici, cette équation s'intègre facilement. On trouve :

$$P - P_{atm} = v_0^2(\rho - \rho_0) + v_0 k(\rho - \rho_0)^2 + \frac{k^2}{3}(\rho - \rho_0)^3.$$

53. En supposant que $v = v_0 + k(\rho - \rho_0)$ est toujours valide pour $\rho = 985,2 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$, on trouve : $v_0 = 1449,7 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$

54. Cette valeur est très proche de la valeur mesurée. En l'absence d'information sur l'incertitude expérimentale, il semble que l'équation d'état déterminée dans le domaine de stabilité reste valide pour l'eau métastable, du moins jusqu'à cette valeur de masse volumique.