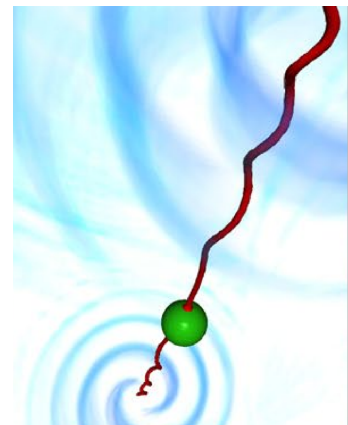


# Les tourbillons classiques et quantiques

★ ★ ★

La turbulence est l'un des derniers problèmes non-résolus de la physique classique moderne. Elle peut se décrire naïvement comme un mélange très irrégulier de tourbillons de toutes tailles et de toutes orientations. Ils doivent donc cohabiter avec le champ de vitesse induit par leur voisins qui les étire, les compresse, les réoriente, jusqu'à ce que la dissipation visqueuse entre en jeu (aux petites échelles) et transforme leur énergie en chaleur. Dans ce problème, nous allons nous concentrer sur l'étude des tourbillons. Précisément, nous nous concentrerons d'abord sur différents modèles de tourbillons, du plus complexe (visqueux), au plus élémentaire (la ligne de vorticité dans un fluide parfait). Ensuite, nous chercherons à comprendre comment visualiser ces tourbillons en ensemenant les écoulements avec des particules. Et pour finir, nous étudierons expérimentalement le cas très particulier des tourbillons quantiques dans l'hélium superfluide. Ces objets quantiques « macroscopiques » constituent la brique élémentaire des écoulements de superfluides qui existent dans l'hélium liquide à basse température, les atomes froids (condensats de Bose-Einstein) et les étoiles à neutrons. La figure ci-dessus représente un tourbillon quantique, en rouge, sur lequel une particule, en vert, est piégée.



Source : HDR Giorgio Krstulovic (2020)  
OCA - CNRS

Dans la **première partie**, nous étudions le cas d'un tourbillon pour lequel la viscosité du fluide ne peut être négligée. Cette partie introduit les équations du mouvement et en particulier, celle de la vorticité que le sujet propose de résoudre dans le cas stationnaire où le tourbillon est étiré selon son axe de rotation.

Dans la **deuxième partie**, nous nous intéressons au mouvement d'un tube de vorticité dans un fluide parfait. Il s'agit d'un tourbillon modélisé par un cylindre de rayon fini, définissant le cœur du tourbillon. La vorticité est constante à l'intérieur du cœur et nulle à l'extérieur. Nous commenons par établir ses caractéristiques grâce à une analogie avec la magnétostatique permettant de rapprocher la circulation du champ de vitesse du courant électrique. Dans la suite, nous déterminons le champ de pression induit par ce tourbillon dans le fluide, de faon à obtenir la forme de la surface libre qui le surplombe. Pour finir cette partie, nous établissons le théorème de Kelvin et nous l'utilisons pour analyser le comportement de ce tourbillon dans le cas de deux écoulements particuliers.

Dans la **troisième partie**, nous simplifions encore notre modèle de tourbillon en faisant tendre la taille de son cœur vers zéro. On parle alors d'une ligne de vorticité

« parcourue » par la circulation du champ de vitesse qu'il génère (l'équivalent d'un fil électrique parcouru par un courant). Cette modélisation nous permet d'aborder le mouvement de ce tourbillon lorsque la symétrie cylindrique du système est brisée et que le champ de vitesse induit par une partie de la ligne influe sur une autre (mouvement auto-induit). Le cas d'un anneau de vorticité est traité et nous permet d'établir le mouvement ondulatoire d'une ligne de vorticité, légèrement perturbée dans le plan perpendiculaire à son axe initial.

Dans la **quatrième partie**, nous nous intéressons à la dynamique de particules de densité différente de celle du fluide en rotation dans lequel elles évoluent. Précisément, nous cherchons la position d'équilibre d'une balle de tennis de table accrochée au bout d'un fil au fond d'un récipient cylindrique, rempli d'eau et en rotation uniforme selon son axe de symétrie. Ce cas d' cole nous permet de conclure que des particules, bien choisies, peuvent être piégées sur le cœur d'un tourbillon et ainsi permettre de le visualiser.

Enfin, dans la **cinquième et dernière partie**, nous nous intéressons aux tourbillons quantiques dans l'hélium II (« superfluide »). Après une série de questions portant sur la thermodynamique associée à l'obtention d'hélium II en laboratoire, nous étudions deux types de particules que l'on peut créer et visualiser dans ce fluide quantique. Le premier type est de la « neige » de di-hydrogène solide. Le deuxième type correspond à des particules chargées : des électrons qui s'entourent d'une bulle de vide lorsqu'ils entrent dans ce liquide. Nous cherchons à caractériser la taille de ces objets, dans le premier cas sur la base de mesures expérimentales, et dans le deuxième en faisant appel à des notions simples de mécanique quantique. Dans la suite, nous analysons des résultats expérimentaux de visualisation de particules dans de l'hélium II en rotation uniforme. Pour clore le sujet nous étudions une approche simplifiée de la description quantique des superfluides   température nulle. Celle-ci nous permet de comprendre pourquoi la circulation du champ de vitesse autour d'un tourbillon quantique est quantifiée et d'établir la valeur du quantum de circulation de Feynman-Onsager.

Ces parties peuvent majoritairement être traitées indépendamment les unes des autres, mais le sujet a une cohérence globale qui aidera les candidats ne se contentant pas de répondre aux questions introductives par exemple. **On veillera à la clarté de la rédaction et au soin apporté à la présentation des résultats. Aucune des réponses attendues ne nécessite une réponse sous la forme d'un paragraphe de texte supérieur à quelques lignes.**

Les résultats numériques sont attendus avec au plus **deux chiffres significatifs**.

### Notations :

Les vecteurs sont notés  $\vec{A}$ .

Les vecteurs unitaires des axes sont notés  $\vec{e}_i$ , avec  $i$  la coordonnée associée à cet axe.

Le produit scalaire de  $\vec{A}$  avec  $\vec{B}$  est noté  $\vec{A} \cdot \vec{B}$ .

Le produit vectoriel de  $\vec{A}$  avec  $\vec{B}$  est noté  $\vec{A} \times \vec{B}$ .

Le gradient du champ scalaire  $f$  est noté  $\vec{\nabla} f$ .

La divergence de  $\vec{A}$  est noté  $\vec{\nabla} \cdot \vec{A}$ .

Le rotationnel de  $\vec{A}$  est noté  $\vec{\nabla} \times \vec{A}$ .

Le laplacien vectoriel de  $\vec{A}$  est noté  $\Delta \vec{A}$ .

### Définitions importantes :

La circulation du champ de vitesse  $\vec{u}$  sur un contour fermé  $C$  :

$$c = \oint_C \vec{u} \cdot d\vec{l}$$

Le vecteur vorticité (avec  $\vec{u}$  la vitesse du fluide) :

$$\vec{\omega} = \vec{\nabla} \times \vec{u}$$

### Données numériques :

Constante des gaz parfaits :  $R = 8,3 \text{ J} \cdot \text{mol}^{-1}$

Masse de l'électron :  $m_{e^-} = 9,1 \times 10^{-31} \text{ kg}$

Constante réduite de Planck :  $\hbar = 1,1 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$

Quantum de circulation de Feynman-Onsager :  $\kappa = h/m_{He} = 1,0 \times 10^{-7} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$

Chaleur latente de vaporisation de l'hélium (entre 1,4 K et 4,2 K) :  $L_v = 83 \text{ J} \cdot \text{mol}^{-1}$

Pression de vapeur saturante de l'hélium à 1,6 K :  $P_{sat}(1,6\text{K}) = 7,6 \text{ mbar}$

Ordre de grandeur de la tension de surface de l'hélium liquide :  $\gamma = 0,34 \text{ mN} \cdot \text{m}^{-1}$

Ordre de grandeur de la masse volumique de l'hélium II :  $\rho_{HeII} = 140 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$

Ordre de grandeur de la masse volumique du di-hydrogène solide :  $\rho_{H_2} = 88 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$

## Analyse vectorielle

### En coordonnées cylindriques :

Gradient d'un champ scalaire :  $\vec{\nabla} f = \frac{\partial f}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \vec{e}_\theta + \frac{\partial f}{\partial z} \vec{e}_z$

Laplacien d'un champ scalaire :  $\Delta f = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$

Divergence d'un champ vectoriel :  $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r A_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$

Rotationnel d'un champ vectoriel :

$$\vec{\nabla} \times \vec{A} = \left( \frac{1}{r} \frac{\partial A_z}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial z} \right) \vec{e}_r + \left( \frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r} \right) \vec{e}_\theta + \frac{1}{r} \left( \frac{\partial}{\partial r} (r A_\theta) - \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right) \vec{e}_z$$

Opérateur intervenant dans la dérivée convective :

$$\begin{aligned} (\vec{A} \cdot \vec{\nabla}) \vec{B} &= \left( A_r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{A_\theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + A_z \frac{\partial}{\partial z} \right) \vec{B} = \left( A_r \frac{\partial B_r}{\partial r} + \frac{A_\theta}{r} \frac{\partial B_r}{\partial \theta} + A_z \frac{\partial B_r}{\partial z} - \frac{A_\theta B_\theta}{r} \right) \vec{e}_r \\ &\quad + \left( A_r \frac{\partial B_\theta}{\partial r} + \frac{A_\theta}{r} \frac{\partial B_\theta}{\partial \theta} + A_z \frac{\partial B_\theta}{\partial z} + \frac{A_\theta B_r}{r} \right) \vec{e}_\theta \\ &\quad + \left( A_r \frac{\partial B_z}{\partial r} + \frac{A_\theta}{r} \frac{\partial B_z}{\partial \theta} + A_z \frac{\partial B_z}{\partial z} \right) \vec{e}_z \end{aligned}$$

### Identités vectorielles :

Gradient d'un produit de champs scalaires :  $\vec{\nabla} (f \cdot g) = f \vec{\nabla} g + g \vec{\nabla} f$

Divergence d'un produit :  $\vec{\nabla} \cdot (f \vec{A}) = f \vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \vec{A} \cdot \vec{\nabla} f$

Rotationnel d'un produit :  $\vec{\nabla} \times (f \vec{A}) = \vec{\nabla} f \times \vec{A} + f \vec{\nabla} \times \vec{A}$

Rotationnel d'un gradient :  $\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} f) = \vec{0}$

Divergence d'un rotationnel :  $\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = 0$

Théorème du rotationnel :  $\iint (\vec{\nabla} \times \vec{A}) \cdot d\vec{S} = \oint \vec{A} \cdot d\vec{l}$

Théorème de la divergence :  $\iiint (\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) dV = \oint \vec{A} \cdot d\vec{S}$

Double produit vectoriel :  $\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = (\vec{A} \cdot \vec{C}) \vec{B} - (\vec{A} \cdot \vec{B}) \vec{C}$

Produit mixte :  $(\vec{A} \times \vec{B}) \cdot \vec{C} = -\vec{B} \cdot (\vec{A} \times \vec{C})$

Gradient d'un produit scalaire :

$$\vec{\nabla} (\vec{A} \cdot \vec{B}) = (\vec{A} \cdot \vec{\nabla}) \vec{B} + (\vec{B} \cdot \vec{\nabla}) \vec{A} + \vec{A} \times (\vec{\nabla} \times \vec{B}) + \vec{B} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A})$$

Formule du double rotationnel :  $\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) - \Delta \vec{A}$

Produit vectoriel d'un rotationnel :  $\vec{A} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = \frac{1}{2} \vec{\nabla} A^2 - (\vec{A} \cdot \vec{\nabla}) \vec{A}$

Laplacien vectoriel :  $\Delta \vec{A} = \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) - \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A})$

# 1 Tourbillon visqueux

## 1.1 Équations du mouvement

Nous considérons le cas d'un fluide homogène et incompressible. Le tourbillon a son axe de rotation selon  $(Oz)$ . Pour rendre compte de la symétrie du problème, nous utilisons les coordonnées cylindriques  $(r, \theta, z)$  définies à partir de cet axe.

1. Dans le cas général, le bilan de quantité de mouvement d'une particule fluide (équation de Naviers-Stokes) s'écrit :

$$\rho \left( \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u} \right) = \rho \frac{D \vec{u}}{Dt} = -\vec{\nabla} P + \eta \Delta \vec{u} + \vec{f}$$

Définir toutes les variables de cette équation et donner leurs unités (on introduira  $\nu = \eta/\rho$ , la viscosité cinématique).

2. Démontrer dans le cas général l'équation qui traduit la conservation de la masse, puis simplifier cette expression pour rendre compte des hypothèses de ce problème.

On définit le vecteur vorticité comme :  $\vec{\omega} = \vec{\nabla} \times \vec{u}$  avec  $\vec{u}$  la vitesse du fluide. En prenant le rotationnel de l'équation de Naviers-Stokes, on peut montrer que :

$$\frac{D \vec{\omega}}{Dt} = (\vec{\omega} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u} + \nu \Delta \vec{\omega} \quad (1)$$

3. Commenter cette équation, sans considérer le terme non linéaire faisant intervenir la vorticité et la vitesse du fluide.

## 1.2 Tourbillon de Burgers

Nous nous intéressons pour commencer au cas d'un tourbillon étiré selon son axe de symétrie dans un fluide visqueux en régime stationnaire. Fixons son axe de rotation à l'axe  $(Oz)$  du repère cylindrique utilisé. Dans le cas du modèle *stationnaire* qui nous intéresse ici, nous imposons un étirement constant au fluide :

$$u_z = 2\sigma z$$

avec  $\sigma$  une constante positive. De plus, nous faisons l'hypothèse que le tourbillon ne change pas de forme le long de  $Oz$ , ce qui se traduit mathématiquement par la relation

$$u_\theta(\vec{r}') = u_\theta(r)$$

4. En utilisant l'incompressibilité de l'écoulement et ses invariances, déterminez  $u_r$ . Commenter le résultat en le comparant à  $u_z$ .
5. Montrer que la vorticité s'écrit  $\vec{\omega} = \omega(r) \vec{e}_z$ .
6. Résoudre l'équation (1) en projection sur  $\vec{e}_z$  (on utilisera le fait que  $\left(\frac{\partial \omega}{\partial r}\right)_{r=0} = 0$ ). Montrer que :

$$\omega = \omega_0 \exp\left(-\left(\frac{r}{r_0}\right)^2\right)$$

Donner l'expression de  $r_0$  en fonction des constantes du problème. Que représente  $\omega_0$  ?

7. Donner un sens physique à  $r_0$ .
8. La circulation du champ de vitesse  $\mathcal{C}(r) = \oint_C \vec{u} \cdot d\vec{l}$ , calculée selon un contour  $C$  circulaire de rayon  $r$ , centré sur le tourbillon et perpendiculaire à son axe de rotation, tend vers une constante  $\Gamma$  quand  $r \rightarrow \infty$ . Calculer  $\mathcal{C}(r)$  grâce à l'expression de la vorticité obtenue précédemment. Exprimer  $\Gamma$  en fonction de  $r_0$  et  $\omega_0$ , puis exprimer  $u_\theta$  en fonction de  $\mathcal{C}(r)$ .
9. Faire apparaître une vitesse caractéristique en s'intéressant aux comportements asymptotiques de  $u_\theta$  en  $r/r_0 \rightarrow 0$  et  $r/r_0 \rightarrow \infty$ . Représenter sur deux figures distinctes, les variations de  $u_\theta$  et  $\omega$  adimensionnées par des grandeurs pertinentes, en fonction de  $r/r_0$ .
10. Tracer une représentation schématique de ce tourbillon et du champ de vitesse que nous avons considéré ici.
11. Dans un écoulement turbulent, qu'est-ce qui joue le rôle de  $\sigma$  ?

## 2 Mouvement d'un tube de vorticité dans un fluide parfait

Dans cette partie, nous considérons que la viscosité du fluide est nulle, qu'il est incompressible et que nous sommes en régime stationnaire. Nous nous intéressons au mouvement d'un tube de vorticité dans un fluide parfait. Il s'agit d'un tourbillon modélisé par un cylindre de rayon fini, définissant le cœur du tourbillon. La vorticité est constante à l'intérieur du cœur et nulle à l'extérieur.

### 2.1 Analogie magnétostatique et tourbillon de Rankine

Nous exploitons l'analogie qui existe entre la magnétostatique et l'hydrodynamique, pour déterminer le champ de vitesse, la vorticité et la circulation du champ de vitesse autour d'un tube de vorticité, analogue à un fil électrique cylindrique.

12. Déterminer dans tout l'espace le champ magnétique  $\vec{B}$  créé par un fil électrique cylindrique de rayon  $r_0$ , aligné avec un axe  $\vec{e}_z$ , parcouru par un courant  $I$  de densité volumique de courant  $\vec{j} = j\vec{e}_z$  constant et parallèle à l'axe du fil. Exprimer  $\vec{B}$  en fonction de  $\mu_0$ ,  $I$ ,  $r_0$ ,  $r$  et de vecteurs unitaires.
13. En considérant la définition de la vorticité, l'incompressibilité de l'écoulement et la circulation du champ de vitesse  $\mathcal{C}$ , établir un parallèle entre ce problème de magnétostatique et un tourbillon. Donner explicitement les analogues de  $\vec{u}$  et  $\vec{\omega}$  en considérant que  $\mathcal{C}$  est l'analogue du flux de  $\vec{j}$  à travers une surface s'appuyant sur le contour utilisé pour le calcul de  $\mathcal{C}$ .
14. On considère maintenant un tourbillon de vorticité constante dans un cylindre de rayon  $r_0$  équivalent au fil électrique considéré précédemment. On note  $\Gamma$  la valeur de  $\mathcal{C}(r)$  pour  $r > r_0$ . En utilisant l'analogie avec la magnétostatique et la réponse à la question 12, donner l'expression de la vitesse, de la vorticité et de la circulation du champ de vitesse dans tout l'espace occupé par ce tourbillon. Exprimer toutes les grandeurs demandées en fonction de  $\Gamma$ ,  $r_0$  et  $r$ .

15. Discuter les points communs et différences entre ce tourbillon dit de Rankine et celui de la question 9. Existe-t-il une zone de l'espace où ces deux modèles sont équivalents ?

## 2.2 Champ de pression et surface libre

L'axe de symétrie du tourbillon considéré est vertical et noté  $(Oz)$ .

16. En utilisant l'équation d'Euler (pas de viscosité) et sans oublier la gravité, montrer que le gradient de pression se met sous la forme :

$$\vec{\nabla} P = \rho \frac{u_\theta^2}{r} \vec{e}_r - \rho g \vec{e}_z$$

dans le cas où  $\vec{u} = u_\theta(r) \vec{e}_\theta$ . Commenter.

17. En déduire le champ de pression en fonction de  $g$ ,  $\rho$ ,  $\Gamma$ ,  $r_0$ ,  $r$  et  $z$ , à une constante près. Traiter séparément les cas  $r < r_0$  et  $r > r_0$ .
18. Montrer que l'expression de la différence de pression  $\Delta P$  entre la pression loin du tourbillon  $P_\infty = P(r \rightarrow \infty)$  et celle au cœur du tourbillon  $P_0 = P(r = 0)$  s'écrit :

$$\Delta P = P_\infty - P_0 = \frac{\rho \Gamma^2}{4\pi^2 r_0^2}$$

19. Déduire de cette valeur la différence de hauteur entre la surface libre du fluide loin du tourbillon et au niveau de son cœur  $\Delta z = z_\infty - z_0$ , en fonction de  $g$ ,  $\Gamma$  et  $r_0$ .
20. Déterminer complètement l'expression de la surface libre du fluide  $z_S(r)$  en fonction de  $g$ ,  $\Gamma$  et  $r_0$ . On fixe  $z_S(r = 0) = 0$ .
21. Représenter selon des axes adimensionnés, par  $r_0$  pour  $r$  et  $\Delta z$  pour  $z_S$ , cette surface libre.

## 2.3 Dynamique d'un tube de vorticité

Le contour sur lequel on calcule la circulation de la vitesse est constitué de particules de fluide qui se déplacent au cours du temps. Ce contour se déplace lui aussi avec les particules de fluide et peut éventuellement se déformer : au cours du temps, un élément de longueur  $\vec{dl}$  du contour peut varier aussi bien en norme qu'en direction en fonction de la vitesse des particules de fluide constituant cet élément.

22. Montrer que, dans le cadre considéré ici (fluide parfait incompressible dans un champ de pesanteur), la dérivée particulaire de la circulation de la vitesse sur un contour fermé est nulle :

$$\frac{D}{Dt} \left( \oint \vec{u} \cdot \vec{dl} \right) = 0$$

C'est le Théorème de Kelvin.

*Note* : On admet que les opérateurs  $\frac{D}{Dt}$  et  $\oint$  peuvent permuter et que  $\vec{u} \cdot \frac{D\vec{dl}}{Dt} = \frac{1}{2} \vec{\nabla} (|\vec{u}|^2) \cdot \vec{dl}$ .

23. Interpréter physiquement cette expression.

24. On considère un élément de tube de vorticit e cylindrique d'axe  $(Oz)$ , de longueur  $dl_{zi}$  et de section  $S_i$  circulaire, au sein duquel la vorticit e est uniforme et orient ee selon  $(Oz)$ . L' el ement de tube subit un  etirement qui augmente sa longueur  a la valeur  $dl_{zf}$ . Comment varie la norme de la vorticit e  $\omega$ ?

Fort de ces r esultats, nous allons analyser les deux cas pratiques sch ematis es sur la Figure 1.

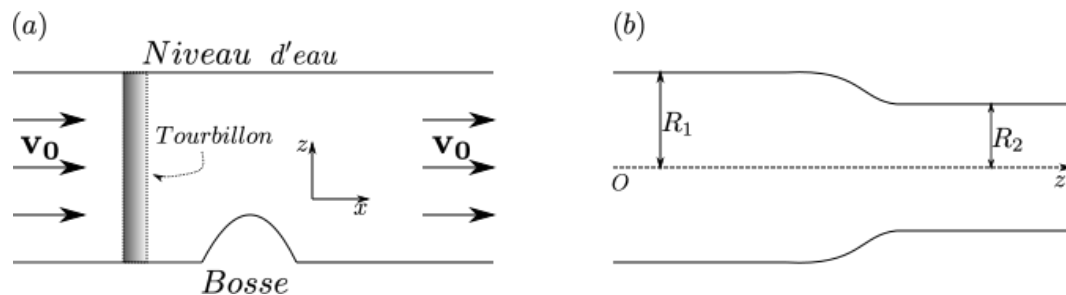


FIGURE 1 – (a) Un tourbillon vertical se d eplace dans un liquide en mouvement. Loin du tourbillon, la vitesse du fluide est horizontale. (b) Repr esentation en coupe d'une canalisation  a g eom etrie cylindrique d'axe  $(Oz)$ . Elle pr esente une section convergente qui fait passer le rayon de la canalisation de  $R_1$   a  $R_2 < R_1$ . Il existe un tube de vorticit e d'axe  $Oz$  au centre de cette conduite.

Dans le premier cas, Figure 1 (a), un tourbillon vertical se d eplace dans un liquide en mouvement. Loin du tourbillon, la vitesse du fluide  $\vec{v}_0$  est horizontale.

25. Si l'on consid ere un objet de taille comparable  a celle du c oeur du tourbillon qui flotte et tourbillonne  a la surface de celui-ci, comment ce mouvement  evolue-t-il au niveau de la bosse au fond de cette « rivi ere » ?

Dans le deuxi eme cas, on consid ere une canalisation  a g eom etrie cylindrique d'axe  $(Oz)$ , repr esent ee en coupe sur la Figure 1 (b). Elle pr esente une section convergente qui fait passer le rayon de la canalisation de  $R_1$   a  $R_2 < R_1$ . On  etudie le r egime permanent de l' ecoulement d'un fluide parfait dans cette canalisation. On notera avec des indices 1 (respectivement 2), ce qu'il se passe en amont (respectivement aval) de la r eduction de diam etre de la canalisation. Il existe un tube de vorticit e d'axe  $Oz$  au centre de cette conduite. On s'int eresse  a la vitesse du fluide uniquement  a l'ext erieur du c oeur de ce tourbillon et loin de la section convergente. On prendra  $u_r = \vec{u} \cdot \vec{e}_r = 0$  dans ces zones et on n eglige la gravit e.

26. Exprimer  $u_{z2}$  en fonction de  $u_{z1}$ ,  $R_1$  et  $R_2$ .

27. Exprimer  $u_{\theta2}(R_2)$  en fonction de  $u_{\theta1}(R_1)$ ,  $R_1$  et  $R_2$ .

### 3 Mouvement auto-induit d'une ligne de vorticit e

Dans cette section, nous continuons  a « simplifier » notre mod elisation des tourbillons en ne consid erant plus que des lignes de vorticit e, c'est- a-dire des tourbillons dont la taille du c oeur tend vers z ero :  $r_0 \rightarrow 0$  (avec les notations pr ec edemment utilis ees). Dans cette limite, et toujours dans un fluide parfait, on peut montrer que la vorticit e est « attach ee » aux particules de fluide : elle est simplement advect ee (transport ee) par la vitesse locale du fluide au point consid er e.



On considère maintenant une ligne de vorticité de forme arbitraire (plus de symétrie cylindrique) et de circulation  $\Gamma$ . Le signe de  $\Gamma$  le long de cette ligne orientée donne le sens de rotation du tourbillon (l'équivalent d'un fil électrique parcouru par un courant électrique  $I$ ). Au cours du temps, cette ligne se déplace et se déforme du fait du champ de vitesse qu'elle engendre. Le calcul de ce champ de vitesse de manière exacte est complexe dans le cas général. On utilise donc l'approximation suivante : en chaque point  $\vec{x}_0$  de la ligne, on trace un cercle tangent à la ligne de vorticité, dans le plan contenant localement la ligne en  $\vec{x}_0$ . On suppose alors que le point  $\vec{x}_0$  de la courbe se déplace comme se déplacerait ce cercle tangent (  la même vitesse et dans la même direction). La vitesse de déplacement du point  $\vec{x}_0$  dépend alors uniquement du rayon de courbure local de la ligne de vorticité en  $\vec{x}_0$ , selon la relation :

$$\vec{u} = C\Gamma \vec{t} \times \frac{\vec{n}}{\mathcal{R}}$$

Dans cette expression,  $\vec{t}$  est le vecteur unitaire localement tangent au tourbillon dans la direction de la circulation  $\Gamma$ ,  $\vec{n}$  est le vecteur unitaire perpendiculaire à  $\vec{t}$  dans le plan local de la ligne de vorticité, dirigé vers l'intérieur de la courbe,  $\mathcal{R} > 0$  est le rayon de courbure local de cette ligne et  $C$  une constante numérique positive ( $C > 0$ ).

### 3.1 Anneau de vorticité

28. Considérer un anneau de vorticité de rayon  $R$ . Dessiner cet anneau et, en un point  $\vec{x}_0$  quelconque de cet anneau, dessiner  $\vec{t}$ ,  $\vec{n}$  et  $\vec{u}$ . En déduire le mouvement de cet anneau en donnant l'expression littérale de sa vitesse.
29. Justifier ce résultat à l'aide d'arguments de symétrie issus de l'analogie magnétostatique.

### 3.2 Ondes de Kelvin

On considère maintenant une ligne de vorticité faiblement déformée schématisée sur la Figure 2 : elle coïncide presque avec l'axe  $(Ox)$ .

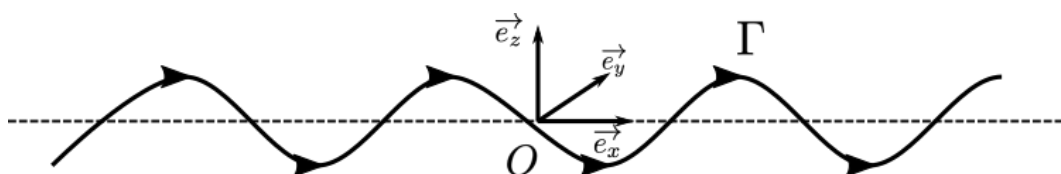


FIGURE 2 – Ligne de vorticité d'axe  $(Ox)$ , faiblement déformée, de circulation  $\Gamma$  dirigée vers les  $x$  croissants (le fluide tourne autour de l'axe  $(Ox)$  dans le sens direct).

Sa circulation  $\Gamma$  est dirigée vers les  $x$  croissants. Nous décrivons cette courbe en fonction de l'abscisse  $x$  par  $\vec{X}(x, t) = x\vec{e}_x + Y(x, t)\vec{e}_y + Z(x, t)\vec{e}_z$ . Les déplacements transverses  $Y(x, t)$  et  $Z(x, t)$  évoluent dans le temps à cause du champ de vitesse

induit par le tourbillon lui-même. On considère de petits déplacements transverses  $Y$  et  $Z$ , ce qui nous permet de linéariser les équations vis-à-vis de ces deux variables. En particulier on peut écrire :

$$\vec{t} \simeq \vec{e}_x$$

$$\frac{\vec{r}}{\mathcal{R}} \simeq \frac{\partial^2 Y}{\partial x^2} \vec{e}_y + \frac{\partial^2 Z}{\partial x^2} \vec{e}_z$$

30. Établir le système d'équations différentielles vérifiées par  $Y(x, t)$  et  $Z(x, t)$ .

On cherche les solutions sous la forme d'ondes :

$$\begin{pmatrix} Y(x, t) \\ Z(x, t) \end{pmatrix} = Re \left\{ \begin{pmatrix} Y_0 \\ Z_0 \end{pmatrix} e^{i(\omega t - kx)} \right\}$$

où  $k \in \mathbb{R}$ ,  $\omega \in \mathbb{R}$ ,  $(Y_0, Z_0) \in \mathbb{C}^2$ , et  $Re$  désigne la partie réelle.

31. Établir la relation de dispersion de ces ondes, appelées ondes de Kelvin. Ces ondes sont-elles dispersives ? Justifier.
32. Déterminer la polarisation des ondes de Kelvin et décrire la structure spatiale de cette onde à un instant donné (la forme de la ligne de vorticité). Représenter cette ligne de vorticité sur un schéma en trois dimensions.
33. Nous avons linéarisé les équations pour obtenir la structure et la relation de dispersion des ondes de Kelvin. Pour une onde donnée, devant quelle longueur caractéristique les déplacements transversaux doivent-ils être petits pour que cette approximation soit valable ?

## 4 Visualisation des tourbillons avec des particules

Depuis la relative démocratisation des caméras numériques rapides et de moyens de calculs tous les jours plus puissants, l'analyse d'image est devenue un outil incontournable de l'hydrodynamique. En ensemençant un écoulement avec des particules visualisées de différentes façons, les chercheurs et ingénieurs peuvent étudier sa dynamique grâce aux trajectoires (lagrangiennes) de ces particules. Ces techniques sont souvent moins intrusives que de venir placer une sonde au milieu de l'écoulement.

Le traceur parfait est évidemment isodense avec le fluide (il a la même densité que le fluide) et de petite taille devant les échelles de l'écoulement. Mais ces conditions sont parfois difficiles à remplir et dans certains cas, comme celui qui nous intéresse dans la suite de ce problème, pas forcément le meilleur choix.

Pour aborder ces questions, nous étudions le cas d' cole défini dans la Figure 3, et **nous démontrons dans la dernière question de cette partie que des particules de densité plus faible que celle du fluide dans lequel elles évoluent sont piégées sur le cœur des tourbillons.**

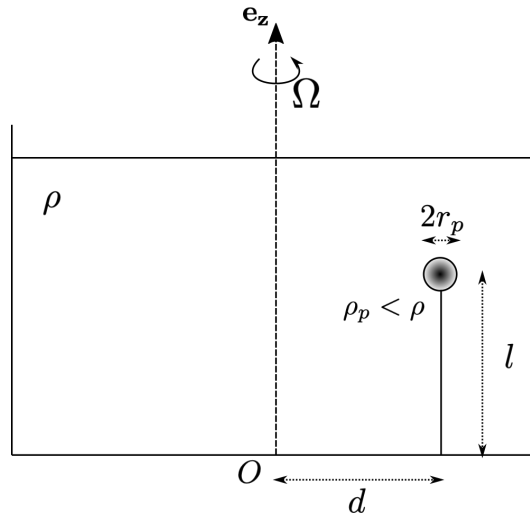


FIGURE 3 – Présentation du dispositif expérimental à  $\Omega = 0$ .

#### 4.1 Balle de tennis de table dans un fluide tournant

On considère un récipient cylindrique rempli d'eau dont la masse volumique est notée  $\rho$ . On immerge complètement une balle de tennis de table sphérique et homogène, de rayon  $r_p$ , de masse volumique  $\rho_p < \rho$  et de masse  $m = \rho_p V$ , avec  $V$  le volume occupé par la balle. On attache cette balle à un fil inextensible de longueur  $l$ . L'autre extrémité du fil est accrochée au fond du récipient, à une distance  $d$  du centre de celui-ci. On met en rotation le récipient à la vitesse angulaire  $\vec{\Omega} = \Omega \vec{e}_z$  constante autour de son axe de révolution confondu avec l'axe vertical. La Figure 3 présente le dispositif expérimental.

34. Définir de façon générale la poussée d'Archimède (notée  $\vec{\Pi}_A$ ), et donner son expression en fonction de la pression et d'une intégrale sur la surface de l'objet considéré.
35. Déterminer la poussée d'Archimède que subit la balle dans le référentiel tournant avec le récipient  $\mathcal{R}'$ . On l'exprimera en fonction de  $\rho$ ,  $V$ ,  $g$ ,  $\Omega$  et  $r$  la distance entre l'axe de rotation et la balle. Cette force est-elle verticale ?
36. Faire le bilan des forces qui s'appliquent sur la balle à l'équilibre dans le référentiel tournant  $\mathcal{R}'$  accompagné d'un schéma en coupe. Déterminer complètement la tension du fil (noté  $\vec{T}$ ). On fera apparaître dans l'expression de  $\vec{T}$  la différence de densité entre le fluide et la particule ( $\rho - \rho_p$ ),  $V$ ,  $g$ ,  $\Omega$  et  $r$  la distance entre l'axe de rotation et la balle.
37. Déterminer la tangente de l'angle  $\theta$  que fait le fil avec la verticale en fonction de  $d$ ,  $l$ ,  $\Omega$ ,  $g$  et  $\sin \theta$ . Cet angle est indépendant des densités du fluide  $\rho$  et de la balle  $\rho_p$ . Expliquer pourquoi.
38. Donner la nouvelle position d'équilibre si l'on considère le cas où la balle s'est remplie d'eau :  $\rho_p > \rho$ . On considère, dans ce cas, que le point où le fil est accroché ne bouge pas, mais que le fond du récipient est abaissé d'une longueur supérieure à  $l$ .

## 4.2 Lien entre trajectoire de particules et isobares de l'écoulement

39. Dans cet écoulement, en régime permanent, le fluide est en rotation solide avec son conteneur. Montrer que la vorticité est constante en tout point du fluide. En donner la valeur.
40. En utilisant les résultats des questions 14 et 17, ou l'expression du gradient de pression donné à la question 16, montrer que les isobares sont des paraboles. Donner leurs équations à une constante près, en fonction de  $\Omega$ ,  $\rho$ ,  $g$ ,  $r$  et  $z$ .
41. Montrer, dans le cas général (quelque soit le champ de pression), que la poussée d'Archimède  $\vec{\Pi}_A$  s'oriente perpendiculairement aux isobares de l'écoulement. Représenter le régime permanent atteint dans le cas particulier décrit sur la Figure 3, en faisant apparaître les isobares.
42. Si le fil se coupe, décrire la trajectoire de la balle de tennis de table (densité  $\rho_p < \rho$ ) sans résoudre l'équation de la dynamique de la balle. Même question pour la même balle qui se serait remplie d'eau (densité  $\rho_p > \rho$ ) dans ce récipient en rotation. On analysera ces mouvements selon  $\vec{e}_z$  et  $\vec{e}_r$ .

Pour clore cette partie, on considère le cas d'une ligne de vorticité de circulation  $\Gamma$  confondue avec l'axe ( $Oz$ ) qui engendre donc un champ de vitesse  $\vec{u} = \Gamma/(2\pi r)\vec{e}_\theta$  dans le fluide parfait, de densité  $\rho$ , qui l'entoure.

43. Montrer qu'une particule sphérique, de densité  $\rho_p < \rho$  et de volume  $V$ , qui est entraînée en rotation autour de ce tourbillon à la vitesse du fluide, se retrouve piégée sur le cœur de ce tourbillon et permet ainsi de le visualiser. Exprimer la résultante des forces s'exerçant sur cette particule selon la direction radiale en fonction de  $(\rho - \rho_p)$ ,  $V$ ,  $\Gamma$  et  $r$ .

## 5 Les tourbillons quantiques dans l'hélium II

Dans cette partie, nous allons montrer que la ligne de vorticité existe sous une forme quantique dans l'hélium liquide.

### 5.1 Obtention d'hélium II dans un réservoir

L'hélium a été liquéfié pour la première fois par le physicien hollandais Heike Kamerlingh Onnes à Leyde aux Pays-Bas le 10 juin 1908. Son diagramme de phase est représenté sur la Figure 4.

L'hélium peut exister sous deux phases fluides distinctes : l'hélium I qui est un liquide « standard » et l'hélium II que l'on appelle communément superfluide qui est un fluide quantique. À ce jour, il n'existe pas un modèle unique pour le décrire sur toute la gamme de températures et de pressions où il existe (comme l'équation de Navier-Stokes dans le cas d'un fluide normal). On notera tout de même qu'il a une **viscosité cinématique extrêmement faible** et une **conductivité thermique que l'on peut considérer comme infinie** (en réalité la température dans ce fluide n'obéit plus à l'équation de la chaleur mais à une équation d'onde avec une vitesse

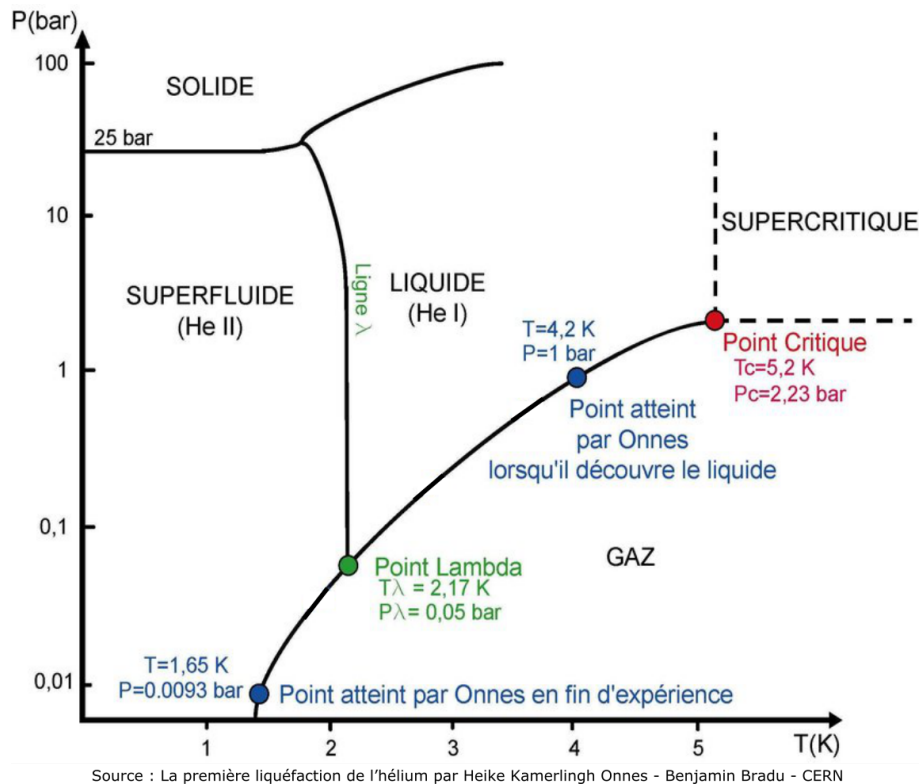


FIGURE 4 – Diagramme de phase de l'hélium.

caractéristique, dite de second son, de l'ordre de  $c_2 = 20 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$  sur la gamme de température que nous considérerons).

Pour manipuler ces fluides expérimentalement, les chercheurs développent des cryostats. La partie basse d'un cryostat permettant de visualiser l'hélium liquide est représentée sur la Figure 5. Il s'agit d'une sorte de poupée russe qui se décompose en 3 conteneurs imbriqués les uns dans les autres. En partant du centre, le réservoir 1K contient l'hélium liquide et gazeux au dessus de lui. Vient ensuite un écran 77K thermalisé sur un bain d'azote liquide dans la partie supérieure du cryostat (schématisé sur la Figure 5 (b)). Enfin un écran 300K peut être touché par l'expérimentateur. Le rôle principal d'un tel dispositif est d'isoler thermiquement le volume contenant l'hélium liquide (le « réservoir 1K ») de tous les modes de transfert thermique existants.

44. Énoncer les trois modes de transfert thermique. De quoi est constituée la zone colorée en gris sur la Figure 5 (b) ? Expliquer le rôle particulier que joue l'écran 77K. Utiliser la loi de Stéfán, pour donner un ordre de grandeur de l'efficacité de cet écran.

On remplit un cryostat avec de l'hélium liquide à la pression atmosphérique. Une fois le régime stationnaire atteint, et le cryostat rempli d'hélium liquide, on constate que l'hélium est en ébullition. Le cryostat n'est pas parfaitement isolant, il y a toujours un apport de chaleur qui tend à réchauffer l'hélium liquide et ainsi à le faire bouillir (tel de l'eau sur le feu).

45. Expliquer comment on peut réduire la température de ce liquide et ainsi obtenir de

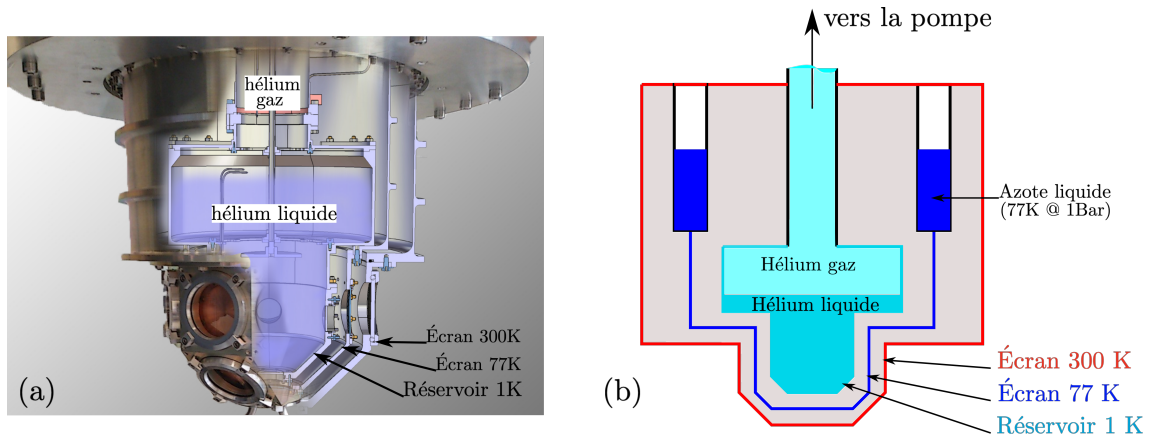


FIGURE 5 – (a) Vue en coupe de l'intérieur d'un cryostat permettant de visualiser de l'hélium liquide. (b) Schéma de principe associé.

l'He II dans le volume de mesure (le réservoir 1K) à l'aide d'une pompe (installée dans le laboratoire à 300K) en prise directe sur le volume contenant l'hélium (Figure 5 (b)). A quel dispositif de la vie courante cela fait-il penser ? Dessiner cette transformation sur une reproduction du diagramme de phase. À quelles pression et température verra-t-on le changement de phase ? Si l'on peut observer le fluide au moment de cette transition, que voit-on de remarquable à l'œil nu ?

46. En régime permanent, si la puissance thermique totale fournie au bain d'hélium liquide est de  $\dot{Q} = 100 \text{ mW}$ , quel est le débit volumique (en  $\text{m}^3 \cdot \text{h}^{-1}$ ) que doit évacuer la pompe pour maintenir une température de 1,6 K dans le réservoir 1K.

## 5.2 Génération de particules dans l'hélium II

L'hélium II est le fluide le plus froid qui existe<sup>1</sup>. Il est donc relativement facile d'obtenir des particules dans ce fluide, puisque toute impureté va s'y solidifier. On peut donc générer des flocons de différentes compositions dans ce fluide. Les expériences qui s'intéressent à la dynamique des tourbillons dans l'hélium II utilisent aujourd'hui de la « neige » de di-hydrogène solide (de densité  $\rho_{H_2} = 88 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ ). Pour mesurer le rayon de ces particules, les expérimentateurs observent leur dynamique dans le fluide au repos. Dans la gamme de température et de pression que nous considérons, la densité de l'hélium II est  $\rho_{HeII} = 140 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ .

47. En considérant l'hélium II comme un fluide classique avec une viscosité cinématique de l'ordre de  $\nu_{HeII} \approx 10^{-8} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$  (uniquement dans cette question), donner la trajectoire des particules en régime permanent dans un fluide au repos et l'expression de leur rayon  $r_p$  en fonction des données du problème. Donner la valeur numérique de ce rayon  $r_p$  dans le cas où la vitesse caractéristique de ce mouvement est  $v_p = 20 \mu\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$ . On rappelle que la force de trainée, dite de Stokes, sur une sphère de rayon  $r_p$ , en mouvement à la vitesse  $\vec{v}_p$ , dans un fluide de viscosité dynamique  $\eta$ , au repos, est :  $\vec{F}_S = -6\pi\eta r_p \vec{v}_p$ . Rappeler la condition de validité de cette expression et vérifier celle-ci *a posteriori*.

1. Si l'on met de côté l'isotope de l'hélium avec un nombre de masse égal à 3.

On peut aussi utiliser des particules plus difficiles à visualiser mais chargées que sont des électrons. Comme cela arrive dans de l'hydrogène ou du néon liquide, quand un électron entre dans le liquide avec une énergie quasiment nulle, une bulle se forme rapidement autour de lui. L'électron se retrouve alors localisé dans une sphère de rayon  $r_p$  (celui de la bulle), équivalente à un puits de potentiel infini où l'énergie potentielle peut être considérée comme nulle dans la bulle et infinie en dehors. Nous allons chercher à calculer le rayon  $r_p$  de cette nouvelle particule dans un bain d'hélium II initialement à pression nulle.

48. Sans résoudre complètement le problème de mécanique quantique associé, calculer la valeur de l'énergie de point-zéro (aussi appelée énergie minimale ou encore énergie de confinement), notée  $U_{zéro}$ , dont l'électron dispose dans sa bulle pour l'empêcher de s'effondrer. On peut constater qu'une constante de l'ordre de 1 apparaît dans cette expression. On la prend égale à 1, et on travaille donc dans la suite du problème avec :

$$U_{zéro} = \frac{\hbar^2}{r_p^2 m_{e^-}}$$

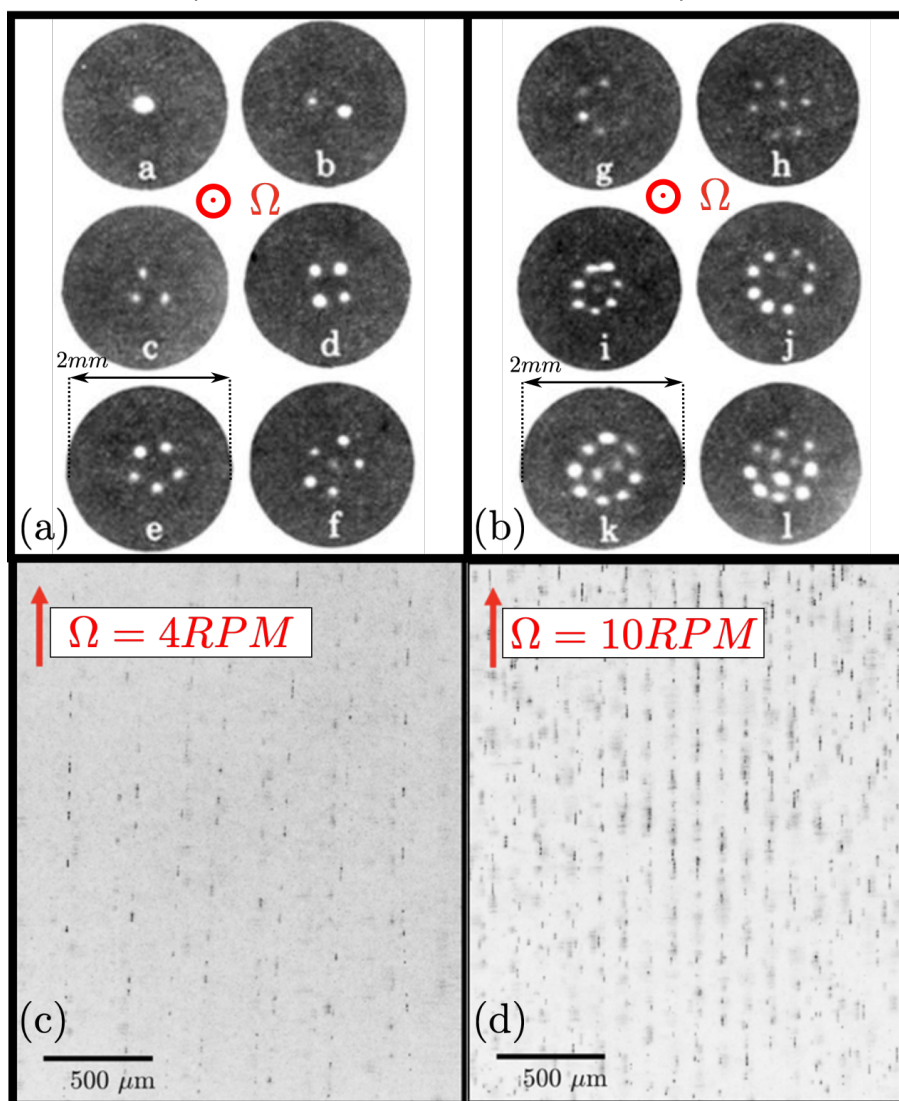
49. A pression nulle, quelle est la force qui tend à faire s'effondrer la bulle ? Donner l'expression de l'énergie  $U_S$  associée à cette force. On notera  $\gamma$  la tension superficielle de l'hélium II.
50. En considérant que le rayon final de la bulle minimise l'énergie totale  $U_{tot}$  mise en jeu, établir l'expression littérale et calculer la valeur du rayon  $r_{p0}$  de cette bulle à pression nulle.
51. Expliquer qualitativement l'effet de la pression du fluide sur le rayon de la bulle  $r_p$ . Refaire l'analyse précédente en tenant compte de celle-ci, en se limitant au cas de l'hélium II à l'équilibre avec son gaz. Dans ce cas, on pourra établir une expression du type :  $r_p(P) = \alpha(P)r_{p0}$  grâce à des développements limités justifiés. Donner la valeur numérique minimale de  $\alpha(P)$  en %.

### 5.3 Visualisation des tourbillons quantiques dans l'Hélium II

En utilisant les deux types de particules dont nous venons de voir quelques propriétés, des chercheurs ont réussi à visualiser les tourbillons quantiques dans un récipient cylindrique (de rayon  $R$ ) en rotation uniforme à la vitesse angulaire  $\vec{\Omega} = \Omega \vec{e}_z$ , l'axe ( $Oz$ ) étant vertical.

Sur la Figure 6, nous voyons le résultat de 2 expériences décrites dans la légende de cette figure. La section 4 de ce problème, nous a permis de démontrer que des particules de densité plus faible que le fluide dans lequel elles évoluent (ce qui est le cas dans ces deux expériences) sont piégées radialement par le cœur des tourbillons présents dans le fluide.

52. Proposer une représentation en vue de dessus et un schéma en trois dimensions du conteneur en rotation à une vitesse angulaire intermédiaire (non minimale) faisant apparaître plusieurs tourbillons en se basant sur les mesures présentées sur la Figure 6. Faire apparaître clairement le sens de rotation du conteneur et de chaque tourbillon.



C. Peretti, J. Vessaire, E. Durozoy, and M. Gibert.  
 Sci. Adv.9, eadh2899(2023) - Published 28 July 2023

FIGURE 6 – Les deux figures du haut, (a) et (b), sont obtenues par la trace que laissent des électrons générés en bas du récipient en rotation et accélérés selon la verticale vers une surface sensible, hors du fluide, qui intègre pendant un temps de l'ordre de la seconde. Les particules chargées laissent une trace blanche sur cet écran. La vitesse de rotation  $\Omega$  du conteneur augmente quand la lettre sur l'image évolue de *a* à *l*. Les deux figures du bas (c) et (d) sont obtenues par visualisation directe : une caméra numérique filme un plan éclairé par une nappe laser qui contient l'axe de rotation d'un récipient d'hélium IIensemencé par des particules de di-hydrogène solide. Ces flocons de di-hydrogène apparaissent en noir sur ces images. Les particules ont un mouvement ascendant de faible vitesse ( $v_p \approx 20 \mu\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$ ), si bien qu'elles quittent le champ de vue après quelques minutes. La vitesse de rotation est donnée sur ces deux figures en « RPM » qui signifie Rotation Par Minute. Dans les deux expériences, les capteurs sont embarqués dans le référentiel tournant avec le fluide.



Pour comprendre ces résultats, il faut savoir que la mécanique quantique impose à la circulation du champ de vitesse autour d'un tourbillon quantique d'être quantifiée :

$$\Gamma = \oint \vec{u} \cdot d\vec{l} = n\kappa$$

Avec  $n$  un nombre entier et  $\kappa = h/m = 1,0 \times 10^{-7} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$  appelé quantum de circulation de Feynman-Onsager, où  $h$  est la constante de Planck et  $m$  la masse d'un atome d'hélium. On notera  $r_0$  le rayon du cœur de ces tourbillons.

53. On considère un tourbillon quantique au centre d'un récipient cylindrique de rayon  $R$ . Dans cette question, on considère les tourbillons quantiques comme des tubes de vorticité de rayon  $r_0$  de sorte que la vitesse du fluide à l'extérieur du cœur du tourbillon ( $r > r_0$ ) est donnée par  $\vec{u} = \Gamma/(2\pi r)\vec{e}_\theta$ . Calculer l'énergie cinétique  $E_c$  par unité de longueur du fluide qui entoure le tourbillon quantique. En déduire que le système préfère générer  $n$  tourbillons quantiques qui portent un quantum  $\Gamma = \kappa$  chacun plutôt que un tourbillon quantique qui porterait  $n$  quanta  $\kappa$  :  $\Gamma = n\kappa$ .
54. On souhaite établir la loi de Feynman qui relie directement la distance inter-tourbillons  $\delta$ , que l'on peut lire sur les mesures expérimentales de la Figure 6, à la vitesse de rotation angulaire du cryostat  $\Omega$  et au quantum de circulation  $\kappa$  :

$$\delta = \sqrt{\frac{\kappa}{2\Omega}}$$

Pour ce faire, on va évaluer, de deux façons différentes, la circulation du champ de vitesse sur un contour circulaire de rayon  $R$  centré sur l'axe de rotation du récipient. Commencer par établir cette expression en considérant que les tourbillons quantiques se répartissent dans le plan perpendiculaire à  $\vec{\Omega}$  de façon homogène. On considère qu'il y a un tourbillon quantique par surface élémentaire d'aire  $\delta^2$  dans ce plan. Ensuite, exprimer cette circulation à l'aide de la vorticité  $\vec{\omega}$  du fluide qui correspond à celle d'une rotation solide  $\vec{\omega} = 2\vec{\Omega}$  en tout point de l'espace.

55. Mesurer  $\delta$  sur les Figures 6 (c) et (d) et comparer cette valeur à la loi qui vient d'être établie. Sachant que la profondeur de champ de ces images est de l'ordre de  $150\mu\text{m}$ , cela peut-il expliquer ce que l'on constate ?

L'intérêt principal d'utiliser des flocons de di-hydrogène solide pour tracer les tourbillons quantiques réside dans le fait que l'on peut étudier leur dynamique.

La Figure 7 présente la réponse du réseau de tourbillons quantiques à une excitation périodique dont les caractéristiques utiles sont données dans la légende.

56. Justifier qualitativement que la structure spatiale de cette perturbation peut correspondre à la structure de l'onde déterminée à la question 32.

Pour clore cette partie expérimentale, nous nous intéressons aux échelles de longueurs mises en jeu dans le système.

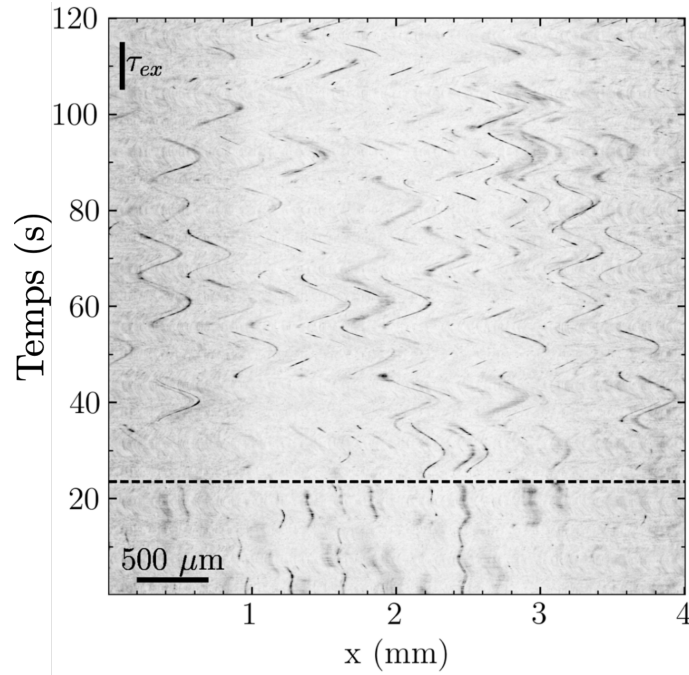


FIGURE 7 – Évolution dans le temps d’une ligne horizontale de pixels d’une image similaire à celles des Figures 6 (c) et (d) pour  $\Omega = 5$  RPM. À partir du temps  $t_0$ , matérialisé par la ligne pointillée, le système est soumis à une excitation périodique de période  $\tau_{ex} = 10$  s qui pilote une perturbation du réseau de tourbillons. *Source : Peretti et al., Sci. Adv. 9, eadh2899 (2023)*

57. On fait l’hypothèse que le cœur du tourbillon est vide et que seule la force de capillarité contrôle son rayon  $r_0$  en s’opposant à la dépression donnée à la question 18. Donner un ordre de grandeur du rayon du cœur d’un tourbillon quantique  $r_0$ , faire l’application numérique et commenter.

On rappelle que la loi de Laplace relie la différence de pression entre les deux côtés d’une interface à la courbure moyenne de cette interface et à sa tension superficielle :  $\Delta P = \gamma \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)$ , où  $R_1$  et  $R_2$  sont les deux rayons de courbure selon deux directions orthogonales à la surface au point considéré.

58. Sachant que les particules de di-hydrogène solide dont nous venons de discuter ont une vitesse moyenne de montée de  $v_p = 20 \mu\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$  dans un écoulement au repos (ce qui donne leur taille selon la question 47), trouver une image originale qui rend compte du rapport d’échelle spatiale entre ces particules et le cœur des tourbillons qu’elles décorent.

## 5.4 Une approche simplifiée de la description quantique des superfluides à $T=0$ K

Dans cette partie, nous allons faire le lien entre la mécanique quantique et l’hydrodynamique et ainsi aborder de façon simplifiée la modélisation à  $T = 0$  K de l’hélium II. Considérons une particule de fluide de masse  $m$  (constante), à laquelle nous associons la fonction d’onde :

$$\psi(\vec{r}, t) = A(\vec{r}, t) e^{i\phi(\vec{r}, t)}$$

59. À partir de l'équation de Schrödinger dépendante du temps pour une particule de masse  $m$  dans un potentiel externe stationnaire  $V(\vec{r})$

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi + V\psi$$

montrer que les fonctions  $A$  et  $\phi$  satisfont au système suivant :

$$\begin{cases} (1) & \hbar \frac{\partial \phi}{\partial t} - \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\nabla^2 A}{A} + \frac{\hbar^2}{2m} (\vec{\nabla} \phi)^2 + V = 0 \\ (2) & \frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\hbar}{m} \vec{\nabla} A \cdot \vec{\nabla} \phi + \frac{\hbar}{2m} A \nabla^2 \phi = 0 \end{cases}$$

60. Pour faire le lien avec un fluide, nous définissons une densité de probabilité de la masse volumique comme  $\rho = m\psi\psi^*$ , où  $\psi^*$  est le complexe conjugué de  $\psi$ . On définit la fonction de flux de probabilité de présence associé :

$$\vec{j} = \frac{\hbar}{2i} (\psi^* \vec{\nabla} \psi - \psi \vec{\nabla} \psi^*)$$

Montrer que  $\rho = mA^2$  et  $\vec{j} = \hbar A^2 \vec{\nabla} \phi$ .

61. On peut alors définir une vitesse  $\vec{u}$  grâce à la relation  $\vec{j} = \rho \vec{u}$ . Donner son expression et commenter sa forme. Peut-elle décrire un écoulement où  $\vec{\omega} = \vec{\nabla} \times \vec{u} \neq \vec{0}$  ?
62. En multipliant l'équation (2) du système précédent par  $2mA$  et fort de l'introduction des grandeurs hydrodynamiques que nous venons de faire, montrer que cette équation est équivalente à l'équation de conservation démontrée à la question 2.
63. Montrer que l'équation (1) du système précédent peut se réécrire sous la forme :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{1}{2} (\vec{\nabla} \varphi)^2 + \frac{V_Q}{m} + \frac{V}{m} = 0, \text{ avec } \varphi = \phi \hbar / m.$$

Donner l'expression de  $V_Q$  que l'on appelle « potentiel quantique » en fonction de  $\hbar$ ,  $m$ , et  $A$ .

64. Pour finir, transformer cette équation en une équation hydrodynamique que nous avons utilisée tout au long de ce sujet (exception faite du potentiel quantique). On précisera alors la signification physique de  $V$ .
65. Maintenant que le lien entre la physique quantique et l'hydrodynamique est clair, justifier la quantification de la circulation du champ de vitesse autour d'un tourbillon quantique ainsi que la valeur du quantum de circulation  $\kappa = \frac{h}{m}$  qui nous a permis d'expliquer les mesures hydrodynamiques faites dans l'hélium II.

★ ★ ★