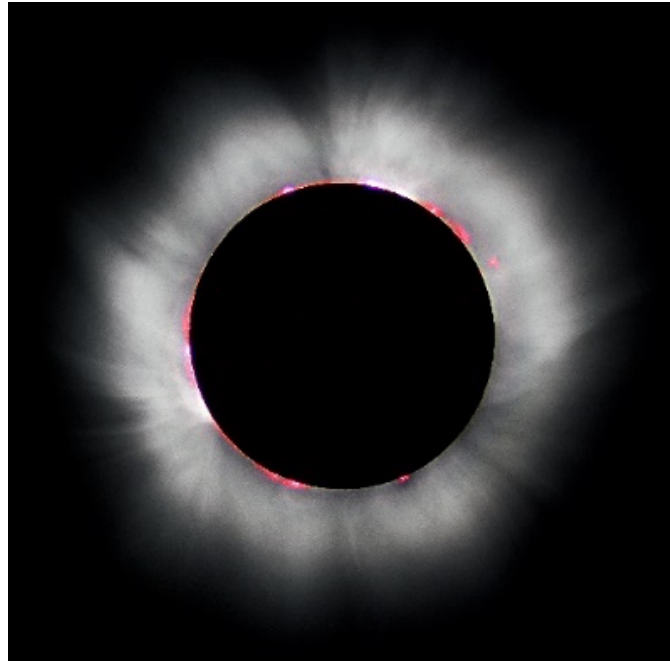


## Conversion d'énergie solaire



**Figure 1 : Couronne solaire visible en France lors de l'éclipse solaire du 11 août 1999.**

Ce sujet porte sur différents aspects de la conversion de l'énergie solaire.

**La partie II dépend partiellement de la partie I.**

**La partie III est entièrement indépendante de la partie I et de la partie II.**

**Il est conseillé de prendre connaissance de l'ensemble de l'énoncé. Les candidats peuvent commencer par traiter la partie III puis aborder les parties I et II s'ils le souhaitent.**

**La clarté de la rédaction, la correction de la langue et la qualité de la présentation constituent une part importante de l'évaluation de la copie.**

Certaines questions sont repérées par une double barre dans la marge. Il s'agit de questions moins guidées pour lesquelles il est attendu une prise d'initiative de la part du candidat. Une argumentation conforme à la démarche scientifique sera valorisée par le correcteur, même si la réponse proposée demeure inaboutie.

*Si, au cours de la composition, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit son travail en précisant, le cas échéant, les initiatives qu'il est amené à prendre.*

## Formulaire d'analyse vectorielle

- Pour tout champ de vecteur  $\vec{A}$ ,  $\mathcal{V}$  étant un volume délimité par une surface  $\mathcal{S}$  :

$$\oiint_{\mathcal{S}} \vec{A} \cdot \overrightarrow{d^2S} = \iiint_{\mathcal{V}} \text{div}(\vec{A}) d^3\tau$$

- $(\vec{A} \wedge \vec{B}) \cdot \vec{C} = \vec{A} \cdot (\vec{B} \wedge \vec{C}) = -\vec{B} \cdot (\vec{A} \wedge \vec{C})$
- $\overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{rot}}\vec{A}) = \overrightarrow{\text{grad}}(\text{div}\vec{A}) - \Delta\vec{A}$
- $\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{A} \wedge \vec{B}) = (\vec{B} \cdot \overrightarrow{\text{grad}})\vec{A} - (\vec{A} \cdot \overrightarrow{\text{grad}})\vec{B} + \vec{A}(\text{div}\vec{B}) - \vec{B}(\text{div}\vec{A})$
- $(\overrightarrow{\text{rot}}\vec{A}) \wedge \vec{B} = (\vec{B} \cdot \overrightarrow{\text{grad}})\vec{A} - \overrightarrow{\text{grad}}\left(\frac{\vec{A} \cdot \vec{B}}{2}\right)$
- Gradient en coordonnées cylindriques :  $\overrightarrow{\text{grad}} f = \frac{\partial f}{\partial r} \vec{u}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \vec{u}_\theta + \frac{\partial f}{\partial z} \vec{u}_z$

## Valeurs numériques

- Rayon du Soleil :  $R_S = 7,0 \times 10^5$  km
- Rayon terrestre :  $R_T = 6380$  km
- Distance Terre-Soleil (unité astronomique) :  $D = 1,5 \times 10^8$  km
- Constante de Stefan-Boltzmann :  $\sigma_S = 5,67 \times 10^{-8} \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-4}$
- Conductivité du cuivre à 25°C :  $\sigma_{Cu} = 5,9 \times 10^7 \text{ S} \cdot \text{m}^{-1}$
- Constante de Planck réduite :  $\hbar = \frac{h}{2\pi} = 1,05 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$
- Perméabilité magnétique du vide :  $\mu_0 = 1,26 \times 10^{-6} \text{ H} \cdot \text{m}^{-1}$
- Constante de Boltzmann :  $k_B = 1,38 \times 10^{-23} \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}$

# I. LES ONDES D'ALFVÉN

La température de surface du Soleil est de quelques milliers de kelvins alors que la couronne solaire, qui correspond à la partie extérieure de l'atmosphère solaire visible lors d'une éclipse, est à une température de l'ordre du million de kelvins. Le mécanisme précis de chauffage de la couronne solaire reste une énigme depuis la mise en évidence des températures élevées de la couronne dans les années 1940. Cependant un scénario impliquant les ondes d'Alfvén fait partie des mécanismes privilégiés par la communauté scientifique.

## I.1. Équations de base

Dans cette partie nous allons établir l'existence des ondes d'Alfvén. Ces ondes sont des perturbations se propageant le long des lignes de champ magnétique dans le plasma coronal. Ce dernier sera assimilé à un fluide conducteur de conductivité électrique  $\sigma$ , de densité volumique de courant  $\vec{j}$ , de masse volumique  $\rho$  et de viscosité dynamique  $\eta$ . Le champ des vitesses est noté  $\vec{u}$ , le champ de pression  $p$  et le champ magnétique  $\vec{B}$ . Ces champs vérifient notamment l'équation de continuité et l'équation de Navier-Stokes :

$$\operatorname{div}(\rho\vec{u}) + \frac{\partial\rho}{\partial t} = 0 \quad (1)$$

$$\rho \left( \frac{\partial\vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \overrightarrow{\operatorname{grad}})\vec{u} \right) = -\overrightarrow{\operatorname{grad}}(p) + \vec{j} \wedge \vec{B} + \eta\Delta\vec{u} \quad (2)$$

1. En considérant un volume fermé  $\mathcal{V}$  délimité par une surface fermée  $\mathcal{S}$  et en réalisant soigneusement un bilan de masse entre deux instants voisins, démontrer l'équation (1).
2. Dans la suite on considèrera l'écoulement incompressible, de sorte que  $\rho = \rho_0$ . Montrer que  $\vec{u}$  est à flux conservatif.
3. Décrire brièvement le sens physique des différents termes de l'équation (2) sans excéder deux lignes de réponse par terme.
4. Les permittivités magnétiques et diélectriques du plasma coronal sont celles du vide. Rappeler les équations de Maxwell dans le vide. Préciser leur expression simplifiée dans l'approximation des régimes quasi-stationnaires (ARQS).

*On se placera dans le cadre de cette approximation dans la suite de cette partie.*

### Changement de référentiel non relativiste du champ électromagnétique.

Un référentiel ( $R'$ ) est en translation uniforme de vitesse  $\vec{u}$  par rapport à un référentiel ( $R$ ). Les champs électriques et magnétiques sont notés  $(\vec{E}', \vec{B}')$  dans le référentiel ( $R'$ ) et  $(\vec{E}, \vec{B})$  dans le référentiel ( $R$ ). On se place dans l'approximation non relativiste.

5. Justifier en quelques mots l'invariance de la force de Lorentz dans un changement de référentiel.

Utiliser cette invariance pour établir les relations suivantes :

$$\vec{E}' = \vec{E} + \vec{u} \wedge \vec{B}; \vec{B}' = \vec{B}$$

6. En utilisant la loi de transformation des vitesses montrer que, pour un conducteur globalement neutre, la densité volumique de courant  $\vec{j}$  est invariante dans le changement de référentiels (R') et (R).

Justifier que la loi d'Ohm locale dans un conducteur de conductivité  $\sigma$  animé d'une vitesse  $\vec{u}$  dans un référentiel (R) dans lequel est évalué le champ électromagnétique  $(\vec{E}, \vec{B})$  s'exprime :

$$\vec{j} = \sigma(\vec{E} + \vec{u} \wedge \vec{B})$$

## 1.2. Équation d'induction

Nous nous proposons maintenant d'établir une équation d'évolution pour le champ magnétique dans le plasma coronal.

7. Montrer que  $\vec{B}$  vérifie l'équation d'induction dans le plasma solaire :

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \overrightarrow{\text{rot}}(\vec{u} \wedge \vec{B}) + \eta_m \Delta \vec{B}, \quad (3)$$

où  $\eta_m = \frac{1}{\mu_0 \sigma}$  correspond à la diffusivité magnétique.

8. On peut étudier le sens concret de l'équation (3) en se plaçant, dans un premier temps, dans le cas particulier où le champ de vitesse est nul,  $\vec{u} = \vec{0}$ , et le plasma infini dans le demi-plan  $z \geq 0$ . Donner un exemple de processus physique régi par une équation similaire à l'équation (3) dans le cas où  $\vec{u} = \vec{0}$ .

Nous cherchons un champ magnétique dont la représentation complexe est de la forme :

$$\vec{B} = \vec{B}_s f(z) e^{i\omega t}$$

En utilisant l'équation d'induction, retrouvez l'équation différentielle pour la fonction spatiale du champ  $f(z)$  :

$$\frac{d^2 f}{dz^2} - \alpha^2 f = 0,$$

où  $\alpha = (1 + i) \sqrt{\frac{\omega}{2\eta_m}}$ .

9. Déterminer la solution de l'équation précédente et démontrer que le champ magnétique se propage dans le plasma dans une épaisseur de dimension caractéristique  $\delta$  que l'on exprimera en fonction de  $\eta_m$  et  $\omega$ . Commentez l'évolution de cette épaisseur de peau  $\delta$  en fonction de la conductivité  $\sigma$  et de la pulsation  $\omega$ .

Dans le cadre d'un écoulement incompressible, on peut transformer l'équation (3) pour faire apparaître deux nouveaux termes :

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}) \vec{B} - (\vec{B} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}) \vec{u} = \eta_m \Delta \vec{B}. \quad (4)$$

10. A quel type de transport du champ magnétique correspond le terme  $(\vec{u} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}) \vec{B}$  ? Proposez en quelques mots une interprétation pour le terme  $(\vec{B} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}) \vec{u}$ . Récrire cette équation en faisant apparaître la dérivée particulière (ou dérivée lagrangienne)  $\frac{D\vec{B}}{Dt}$  du champ magnétique.

### I.3. Équation de la quantité de mouvement et paramètres sans dimension

11. En utilisant les équations de Maxwell, montrer que l'on peut écrire l'équation de quantité de mouvement (2) telle que :

$$\rho_0 \left( \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}) \vec{u} \right) = -\overrightarrow{\text{grad}}(p) - \overrightarrow{\text{grad}} \left( \frac{B^2}{2\mu_0} \right) + \eta \Delta \vec{u} + \frac{1}{\mu_0} (\vec{B} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}) \vec{B} \quad (5)$$

Proposer une interprétation physique du terme  $-\overrightarrow{\text{grad}} \left( \frac{B^2}{2\mu_0} \right)$ . Pour illustrer son propos, le candidat pourra s'appuyer sur un schéma.

On s'intéresse désormais aux phénomènes qui se produisent dans la couronne solaire. Ici, la longueur caractéristique des boucles magnétiques issues du soleil est  $L = 10^7$  m, le champ magnétique caractéristique  $B_0 \approx 10^{-2}$  T et la vitesse caractéristique  $U_0 = 10^3$  m·s<sup>-1</sup>. Le plasma coronal, dans lequel elles se développent, a une masse volumique de  $\rho_0 \approx 10^{-9}$  kg·m<sup>-3</sup>, une viscosité dynamique  $\eta = 10^{-11}$  Pa·s, et une conductivité  $\sigma = 10^3$  Ω<sup>-1</sup>·m<sup>-1</sup>. On introduit de plus les champs et les opérateurs adimensionnés (marqués par  $\sim$ ) suivants :

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{B} = \frac{B}{B_0} \\ \vec{u} = \frac{u}{U_0} ; \tilde{t} = \frac{U_0 t}{L} \\ \tilde{p} = \frac{p}{\rho_0 U_0^2} \\ \overrightarrow{\text{grad}} = L \overrightarrow{\text{grad}} \\ \tilde{\Delta} = L^2 \Delta \end{array} \right.$$

L'équation de Navier-Stokes (2) et l'équation de la dynamique du champ magnétique (4) deviennent alors :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{u}}{\partial \tilde{t}} + (\vec{u} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}) \vec{u} &= -\overrightarrow{\text{grad}} \tilde{p} + \frac{1}{Re} \tilde{\Delta} \vec{u} + M_A \left( -\overrightarrow{\text{grad}} \frac{\vec{B}^2}{2} + (\vec{B} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}) \vec{B} \right) \\ \frac{\partial \vec{B}}{\partial \tilde{t}} + (\vec{u} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}) \vec{B} &= (\vec{B} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}) \vec{u} + \frac{1}{R_m} \tilde{\Delta} \vec{B} \end{aligned}$$

Dans ces équations, on a fait apparaître trois nombres sans dimension : le nombre de Reynolds hydrodynamique  $Re = \frac{\rho_0 L U_0}{\eta}$ , le nombre de Reynolds magnétique  $R_m = \frac{L U_0}{\eta_m}$ , et le nombre de Mach alfvénique  $M_A = \frac{B_0^2}{\mu_0 \rho_0 U_0^2}$ .

12. Chacun de ces nombres peut être interprété comme le rapport de deux grandeurs physiques d'intérêt : pour chacun, préciser lesquelles.

Calculer les ordres de grandeur des nombres sans dimension  $Re, R_m, M_A$ . Quel est le régime d'écoulement ? Cet écoulement est-il piloté par le champ hydrodynamique ou par le champ magnétique ?

D'après les ordres de grandeur obtenus, quels termes des équations d'induction (3) et (4) et de l'équation de la quantité de mouvement (5) peut-on négliger ?

Dans la suite on se **placera dans le cadre de la magnétohydrodynamique idéale en prenant  $R_m \gg 1$** . Dans cette approximation on peut négliger le phénomène de diffusion du champ magnétique, cela entraîne le « gel » des lignes de champ magnétique et des lignes de courant les unes par rapport aux autres. Les lignes de champ magnétique sont donc contraintes de se déplacer avec le fluide et réciproquement.

#### 1.4. Ondes d'Alfvén

L'écoulement du plasma de la couronne solaire est considéré **incompressible et sans gradient de pression hydrodynamique**.

13. Récrire les équations (4) et (5) dimensionnées en négligeant les termes qui peuvent l'être selon les résultats de la question 12.

On introduit un champ magnétique constant et uniforme  $\vec{B}_0 = B_0 \vec{e}_z$ . On observe une petite perturbation localisée de la vitesse qui entraîne une perturbation du champ magnétique :

$$\begin{aligned}\vec{u} &= \vec{v}, \\ \vec{B} &= \vec{B}_0 + \vec{b},\end{aligned}$$

où  $\vec{v}$  et  $\vec{b}$  sont des champs d'ordre 1.

Un calcul au premier ordre, non demandé, permet de démontrer que la perturbation  $\vec{b}$  doit vérifier :

$$\vec{B}_0 \cdot \vec{b} = 0.$$

14. Montrer que les champs  $\vec{v}$  et  $\vec{b}$  vérifient le système :

$$\begin{aligned}\frac{\partial \vec{b}}{\partial t} &= B_0 \frac{\partial}{\partial z} \vec{v} \\ \rho_0 \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} &= \frac{1}{\mu_0} B_0 \frac{\partial}{\partial z} \vec{b}\end{aligned}$$

15. Déterminer l'équation de propagation vérifiée par le champ magnétique  $\vec{b}$ . On introduira une vitesse caractéristique pour ces ondes dites la vitesse d'Alfvén :  $V_A = \frac{B_0}{\sqrt{\rho_0 \mu_0}}$ .

Donner un ordre de grandeur de cette vitesse dans la couronne.

16. En cherchant les solutions de l'équation précédente sous la forme  $\vec{b} = \vec{b}_0 e^{i(\omega t - k_x x - k_y y - k_z z)}$ , établir la relation de dispersion des ondes dites d'Alfvén en faisant apparaître la norme du vecteur d'onde  $k = \|\vec{k}\|$ , ainsi que l'angle  $\theta$  entre  $\vec{k}$  et  $\vec{B}_0$ .

On note  $\overrightarrow{\text{grad}}_k$  l'opérateur vectoriel défini en coordonnées cartésiennes par l'expression :  $\overrightarrow{\text{grad}}_k = \frac{\partial}{\partial k_x} \vec{e}_x + \frac{\partial}{\partial k_y} \vec{e}_y + \frac{\partial}{\partial k_z} \vec{e}_z$ .

17. Donner la signification physique de la vitesse de phase et de la vitesse de groupe. On rappelle que la vitesse de groupe vectorielle s'exprime  $\vec{v}_g = \overrightarrow{\text{grad}}_k \omega$ . Exprimer ces deux

vitesse dans le cas des ondes d'Alfvén en fonction de  $B_0$ ,  $\theta$ ,  $\rho$ ,  $\mu_0$ . Commenter en précisant la direction de propagation de l'énergie transportée par l'onde.

**18.** Montrer que les ondes d'Alfvén sont des ondes transversales. Citez un exemple d'ondes transversales ainsi qu'un exemple d'ondes longitudinales dans un autre domaine de la physique.

**19.** La solution de l'équation de la vitesse peut aussi être mise sous la forme

$\vec{v} = \vec{v}_0 e^{i(\omega t - k_x x - k_y y - k_z z)}$ . Montrer qu'il y a égalité des densités volumiques d'énergie magnétique et cinétique dans ces ondes.

**En se plaçant en dehors de l'approximation de la MHD idéale**, on ne considère plus  $R_m \gg 1$ . On peut réécrire les équations du système avec le terme de diffusion du champ magnétique :

$$\frac{\partial^2 \vec{b}}{\partial t^2} - \frac{B_0^2}{\rho_0 \mu_0} \frac{\partial^2 \vec{b}}{\partial z^2} - \frac{\partial}{\partial t} \eta_m \Delta \vec{b} = 0$$

En reprenant le raisonnement précédent on peut déterminer (calculs non demandés) la nouvelle relation de dispersion pour les ondes d'Alfvén :  $\omega^2 - i\eta_m \omega k^2 - V_A^2 k_z^2 = 0$ .

**20.** Que représente le terme supplémentaire de cette équation ?

On suppose que le vecteur d'onde est réel. Mettre en évidence deux types de dépendance temporelle possible selon la valeur de  $k$ .

Commenter chacun de ces cas.

## II. PUISSANCE RAYONNEE PAR LE SOLEIL

### II.1. Chauffage dans l'atmosphère solaire

Nous appliquons les résultats de la partie I au plasma que constitue l'atmosphère solaire dans la couronne. *Les notations sont celles de la partie I.*

Dans la couronne solaire, la longueur caractéristique à considérer est  $L = 10^7$  m, la masse volumique  $\rho_0 \approx 10^{-9}$  kg·m<sup>-3</sup>, la vitesse  $U_0 = v_{\perp} = 10^3$  m·s<sup>-1</sup> et le champ magnétique  $B_0 \approx 10^{-2}$  T. La couronne solaire est transparente au rayonnement, l'émission ne suit donc pas la loi de Stefan mais des lois plus complexes qui dépendent des collisions entre les espèces. En 1941, Alfvén, à partir de mesures du spectre lumineux de la couronne, estima la température de la couronne,  $T = 10^6$  K, ainsi que le flux énergétique nécessaire à son chauffage,  $\Phi_c \approx 0,2 \times 10^3$  W·m<sup>-2</sup>. Ces valeurs ont été confirmées depuis.

L'objectif de cette partie est de vérifier si les ondes d'Alfvén peuvent être à l'origine de ce chauffage. Pour cela, on s'intéresse au vecteur de Poynting associé à ces ondes.

**21.** Rappeler la définition et l'expression mathématique du vecteur de Poynting  $\vec{\Pi}$  d'une onde électromagnétique. Quelle est l'unité de ce vecteur ?

**On se place à nouveau dans le cadre de la MHD idéale pour laquelle la densité de courant est négligeable dans le plasma.**

On s'intéresse à une onde d'Alfvén se propageant selon une ligne de champ magnétique ( $\vec{B} = B_0 \vec{e}_z$ ,  $\vec{k} = k_z \vec{e}_z$ ) et émergeant de la surface du soleil définie comme un plan défini par les

vecteurs  $(\vec{e}_x, \vec{e}_y)$ . Nous rappelons que ces ondes, abordées dans la partie précédente, sont des ondes transversales, qui présentent une égalité des densités volumiques d'énergie magnétique et cinétique. De plus, elles font intervenir une vitesse caractéristique dites la vitesse d'Alfvén :

$$V_A = \frac{B_0}{\sqrt{\rho_0 \mu_0}}$$

22. Écrire la composante selon  $\vec{e}_z$  de  $\vec{\Pi}$  à partir des composantes transverses de vitesse et de champ magnétique de l'onde  $(v_\perp, b_\perp)$  et du champ magnétique porteur  $(B_0 \vec{e}_z)$ .

23. Justifier qu'ici, la composante en z de la vitesse de l'onde est nulle ( $v_z = 0$ ).

En déduire, à l'aide de la relation entre  $v_\perp$  et  $b_\perp$  rencontrée en question 19, que le vecteur de Poynting peut s'écrire grâce à la vitesse d'Alfvén, de la masse volumique et de la vitesse caractéristique dans la couronne pour la vitesse de l'onde  $v_\perp$  :

$$\Pi_z = \rho_0 v_\perp^2 V_A.$$

24. Calculez l'ordre de grandeur de  $\Pi_z$ . Est-il compatible avec l'ordre de grandeur de flux énergétique nécessaire au chauffage de la couronne solaire  $\Phi_c \approx 0,2 \times 10^3 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2}$  ? Quelle quantité doit-on mesurer sur la longueur d'une boucle magnétique pour définitivement valider que les ondes d'Alfvén sont bien à l'origine du chauffage de la couronne solaire ?

## II.2. Energie solaire reçue à la surface de la Terre

Le rayon  $R_S$  du Soleil est mesuré de son centre jusqu'à la photosphère. La photosphère est la couche en dessous de laquelle les gaz sont assez condensés pour être opaques ; au-delà de laquelle ils deviennent transparents. La photosphère est ainsi la couche la plus visible à l'œil nu. Jusqu'à la photosphère, le Soleil vérifie les hypothèses du rayonnement du corps noir régi par la loi de Stefan-Boltzmann :

$$\mathcal{E}_{emise} = \sigma_S T^4,$$

où  $\mathcal{E}_{emise}$  est la puissance rayonnée par unité de surface et  $\sigma_S \approx 5,67 \times 10^{-8} \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-4}$ .

La première mesure précise de la température du Soleil fut réalisée par Stefan à partir de cette loi et de l'expérience de Soret. Celui-ci a établi expérimentalement que le flux énergétique du Soleil, sur Terre, était 29 fois plus grand que celui d'une lamelle de métal circulaire chauffée placée devant son appareil de mesure, à une distance telle qu'elle apparaissait sous le même angle que le Soleil. Il avait estimé la température de la lamelle  $T_\ell$  entre 1 900 °C et 2 000 °C.

On admet que l'atmosphère terrestre absorbe, dans les conditions de l'expérience de Soret, une fraction  $x_{abs} = \frac{1}{3}$  du flux énergétique du Soleil.

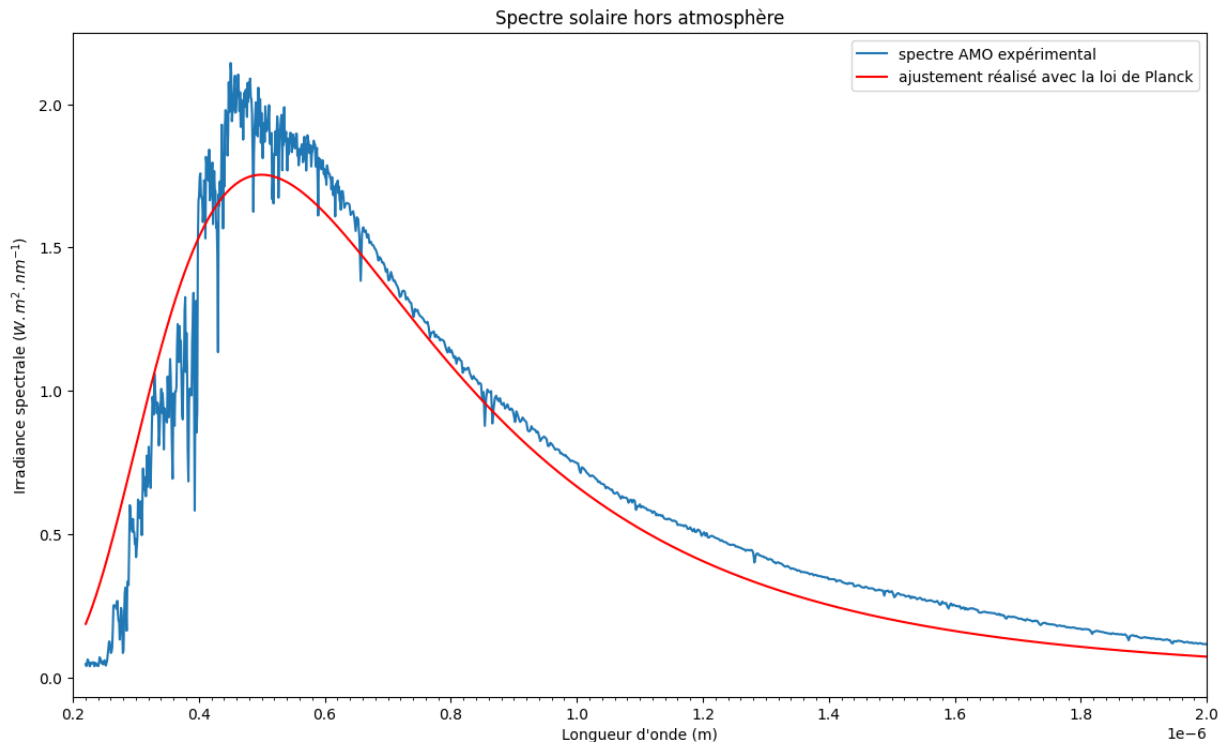
25. Déduire de l'expérience de Soret une valeur approchée de la température  $T_S$  du Soleil. Estimer l'incertitude sur la valeur obtenue en supposant que celle-ci est essentiellement liée à la mesure de la température  $T_\ell$ .

On peut mesurer la puissance spectrale rayonnée par le Soleil juste en dehors de l'atmosphère terrestre ; on parle de spectre AM0. Un tracé du spectre AM0 est représenté sur la figure 2.

26. Si l'on comparait le spectre AM0 avec le spectre obtenu au niveau de la mer après que la lumière du Soleil a traversé l'atmosphère, quelles différences principales observerait-on ?



On cherche à exploiter les mesures faites en les comparant à la loi de Planck. Sous Python, on a utilisé la fonction `curve_fit` de la bibliothèque `scipy.optimize`. Cette fonction réalise un ajustement des points expérimentaux sur une courbe de forme donnée en utilisant la méthode des moindres carrés. Le seul paramètre à ajuster était la valeur de  $T$ . Le résultat est donné ci-dessous, sur la figure 2.



**Figure 2 : Spectre solaire hors atmosphère et ajustement avec la loi de Planck**

27. En quelques lignes, expliquer le principe de la méthode dite « des moindres carrés ».

28. Le maximum de la loi de Planck est donné par la relation :  $\lambda_{max} = \frac{2,899 \cdot 10^{-3}}{T}$ , où la longueur d'onde est exprimée en mètres et la température en kelvins (loi de déplacement de Wien). Quelle valeur de  $\lambda_{max}$  approximative obtenez-vous par lecture graphique de la figure 2 ? Vérifier que cette valeur est compatible avec la valeur renvoyée par la fonction `curve_fit` :  $T = 5761$  K.

On admet que la méthode des moindres carrés a permis d'obtenir la température  $T$  avec une grande précision.

29. En mettant en œuvre le calcul d'un écart normalisé, indiquer si l'estimation de la température issue de l'expérience de Soret (question 25) est compatible avec la détermination faite à partir de l'ajustement par la méthode des moindres carrés.

On donne le rayon du Soleil :  $R_S = 7,0 \times 10^5$  km. La distance Terre-Soleil moyenne, ou unité astronomique, a pour valeur approchée  $D = 1,5 \times 10^8$  km. On appelle constante solaire, notée  $F$ , la puissance surfacique solaire moyenne reçue, hors atmosphère, perpendiculairement aux rayons du Soleil à une distance d'une unité astronomique.

**30.** Calculer à l'aide des résultats précédents (notamment les questions 25 et 28), la valeur de la constante solaire  $F$ . En déduire la valeur du flux solaire moyen en un point de la surface de la Terre.

Une partie de cette énergie est réfléchiée vers l'espace ; l'énergie solaire nette reçue par la Terre par rayonnement solaire s'évalue finalement à un flux moyen de  $237 \text{ W}\cdot\text{m}^{-2}$ . On rappelle que le rayon de la Terre vaut environ  $R_T = 6380 \text{ km}$ .

**31.** Calculer l'énergie totale reçue par rayonnement solaire par la Terre pendant une année. La consommation totale de l'humanité en énergie primaire est de l'ordre de  $1,6 \times 10^5 \text{ TWh}$ . Comparer ces deux ordres de grandeur et faire un commentaire succinct.

### III. ÉTUDE D'UNE INSTALLATION PHOTOVOLTAÏQUE

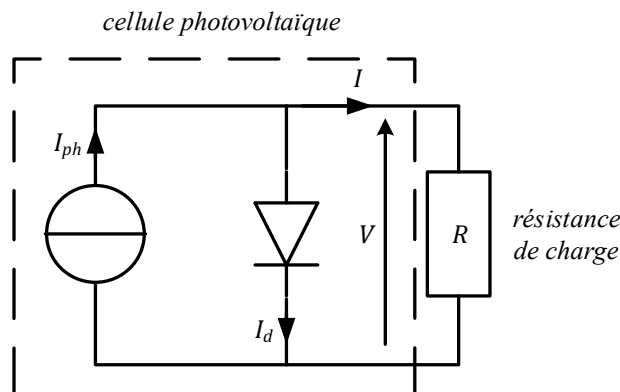
Dans cette partie on se propose d'étudier quelques aspects du raccordement de panneaux photovoltaïques au réseau électrique. On s'intéresse uniquement à une installation monophasée, ce qui correspond à la situation, par exemple, d'une installation domestique. Cette installation n'est pas autonome : pour la raccorder au réseau public de distribution de l'électricité :

- l'installation doit fournir une tension alternative sinusoïdale de valeur efficace égale à  $V_2 = 230 \text{ V}$ , à la fréquence  $f = 50 \text{ Hz}$  ;
- cette tension doit obligatoirement être en phase avec la tension du réseau électrique.

On admet que, dans les conditions d'éclairage considérées, la puissance totale délivrée par l'installation photovoltaïque est égale à  $\mathcal{P} = 2,4 \text{ kW}$ .

#### III.1. Schéma électrique équivalent d'une cellule photovoltaïque

On considère une cellule photovoltaïque en silicium. Celle-ci peut être modélisée par le schéma électrique ci-dessous, où la cellule est connectée à une charge résistive.



**Figure 3 : Schéma électrique d'une cellule photovoltaïque sans pertes reliée à une résistance de charge**

La diode a pour caractéristique :  $I_d = I_S \left( e^{\frac{V}{V_T}} - 1 \right)$  où  $V_T = 25 \text{ mV}$  à  $T = 25^\circ\text{C}$ .

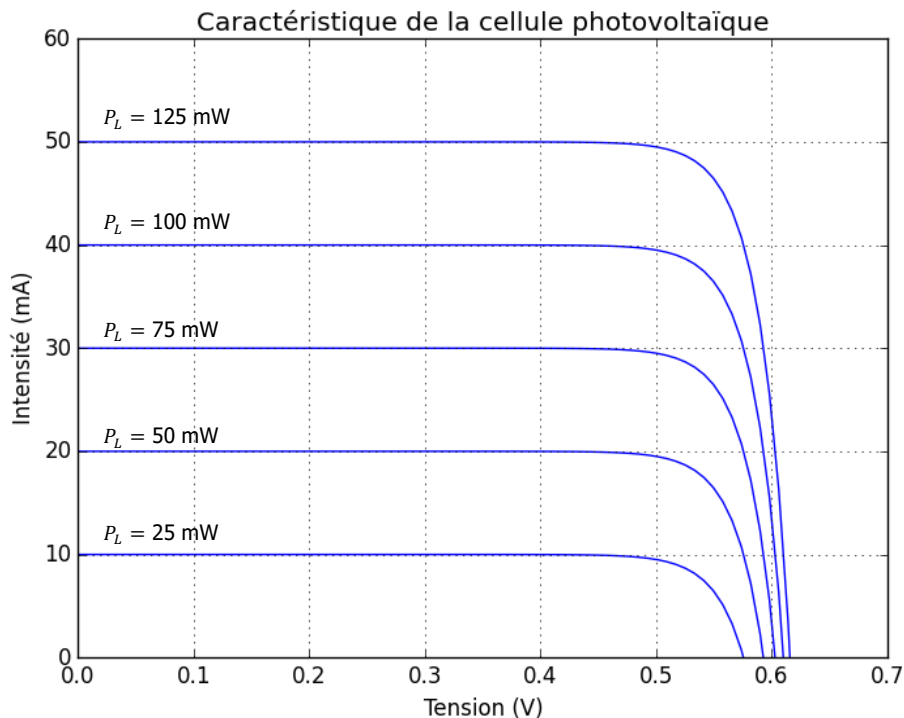
On donne, pour une cellule élémentaire dont l'aire exposée au rayonnement vaut  $1,0 \text{ cm}^2$  :

- $I_S = 1,0 \cdot 10^{-12} \text{ A}$  ;
- $I_{ph} = 40 \text{ mA}$  pour une puissance d'éclairage  $P_L = 100 \text{ mW}$  sur la cellule.

32. Déterminer l'équation de la caractéristique  $I(V)$  de la cellule photovoltaïque en fonction de  $I_{ph}$ ,  $I_S$  et  $V_T$ .

33. Déterminer l'expression littérale de l'intensité de court-circuit  $I_{cc}$  et de la tension en circuit ouvert  $V_{co}$ . Faire les applications numériques à  $T = 25^\circ\text{C}$  pour une puissance d'éclairement  $P_L = 100 \text{ mW}$  sur la cellule.

On représente ci-dessous la forme de la caractéristique  $I(V)$  pour différentes valeurs de l'éclairement.



**Figure 4 : Caractéristique intensité – tension de la cellule photovoltaïque sous différentes puissances d'éclairement**

34. On considère dans cette question que la puissance lumineuse reçue vaut  $P_L = 100 \text{ mW}$ . En utilisant le tracé de la caractéristique, déterminer approximativement la valeur de résistance  $R$  de charge pour laquelle la cellule délivre une puissance électrique maximale. Donner la valeur numérique de cette puissance  $P$ .

35. On souhaite associer plusieurs cellules élémentaires pour obtenir un panneau tel que, sous des conditions d'éclairement correspondant à  $\mathcal{E} = 1,0 \text{ kW}\cdot\text{m}^{-2}$ , on obtienne une tension aux bornes du panneau de 40 V et une puissance électrique égale à 300 W (par panneau). Déterminer le nombre de cellules élémentaires à associer et préciser la manière de les associer.

36. Quelle surface de cellules doit-on placer pour obtenir une puissance totale de l'installation de 2,4 kW dans ces conditions d'éclairement ( $\mathcal{E} = 1,0 \text{ kW}\cdot\text{m}^{-2}$ ) ? Dans ces conditions, définir et calculer numériquement le rendement de l'installation photovoltaïque. Expliquer par un argument physique pourquoi ce rendement est éloigné de l'unité.

37. Supposons que l'on associe en série deux cellules photovoltaïques élémentaires inégalement éclairées, l'une étant éclairée par un flux deux fois plus important que l'autre (à cause d'une salissure par exemple). Représenter qualitativement, sur un même graphe, la caractéristique de

chaque cellule et la caractéristique de l'association en série des deux cellules. L'association en série fonctionne-t-elle de manière satisfaisante ?

### III.2. Transformateur élévateur

Pour être couplé au le réseau de distribution, la tension délivrée par le panneau photovoltaïque est transformée, par un onduleur non étudié ici, en une tension quasi-sinusoïdale d'amplitude  $V_{1max} = 30 \text{ V}$  et de fréquence  $f = 50 \text{ Hz}$ . On utilise un transformateur pour élever cette tension à une valeur compatible avec le réseau.

#### Dimensionnement du transformateur en absence de pertes

38. Rappeler la définition de la valeur efficace d'une tension périodique  $v$  de période  $T$ . Donner la valeur numérique de la valeur efficace  $V_1$  du signal délivré par l'onduleur.

On considère un transformateur représenté sur la figure 5.

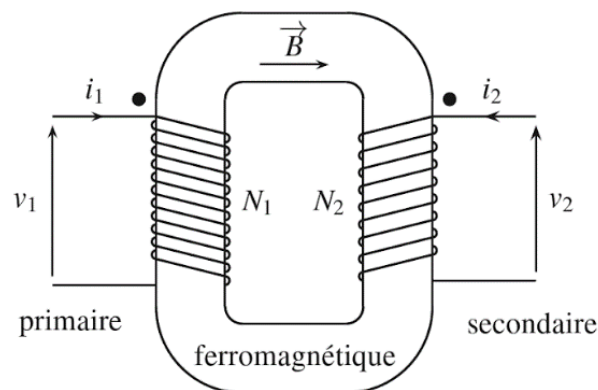


Figure 5 : Représentation du transformateur.

L'enroulement primaire compte  $N_1$  spires, l'enroulement secondaire en compte  $N_2$ .

$$\text{On note } m = \frac{N_2}{N_1}.$$

Les tensions  $v_1$  et  $v_2$  sont sinusoïdales, de valeurs efficaces respectives  $V_1$  et  $V_2$ .

39. Dans le cadre du modèle du transformateur parfait, que peut-on dire du flux du champ magnétique  $\vec{B}$  à travers toute spire des enroulements primaire et secondaire ? En déduire la loi des tensions, qui relie les valeurs efficaces  $V_1$  et  $V_2$  pour un transformateur parfait.

40. En déduire la valeur numérique du rapport de transformation  $m$  permettant de satisfaire le cahier des charges du raccordement de panneaux photovoltaïques décrit au début de la partie III.

On s'intéresse maintenant au matériau ferromagnétique utilisé ; on ne suppose plus le transformateur parfait et on cherche à quantifier quelques limites physiques à prendre en compte dans sa conception. Dans un matériau ferromagnétique, on définit l'aimantation  $\vec{M}$  du matériau ferromagnétique, et les courants d'aimantation par  $\vec{J}_{\text{lié}} = \text{rot}(\vec{M})$ . Les autres distributions de courant sont notées  $\vec{J}_{\text{libres}}$ .

On définit l'aimantation  $\vec{M}$  d'un matériau comme le moment magnétique  $d^3\vec{M}$  par unité de volume  $d^3\tau$  :  $\vec{M} = \frac{d^3\vec{M}}{d^3\tau}$ .

41. Rappeler la relation permettant d'exprimer le champ magnétique  $\vec{B}$  en fonction de l'excitation magnétique  $\vec{H}$  et de l'aimantation  $\vec{M}$ . En déduire l'écriture de l'équation de Maxwell-Ampère reliant  $\vec{H}$  et  $\vec{j}_{\text{libres}}$  dans l'approximation des régimes quasi-stationnaires (ARQS) magnétique.

Sur la figure 6, on représente le cycle d'hystérésis réel et idéalisé du matériau utilisé pour la réalisation du transformateur.

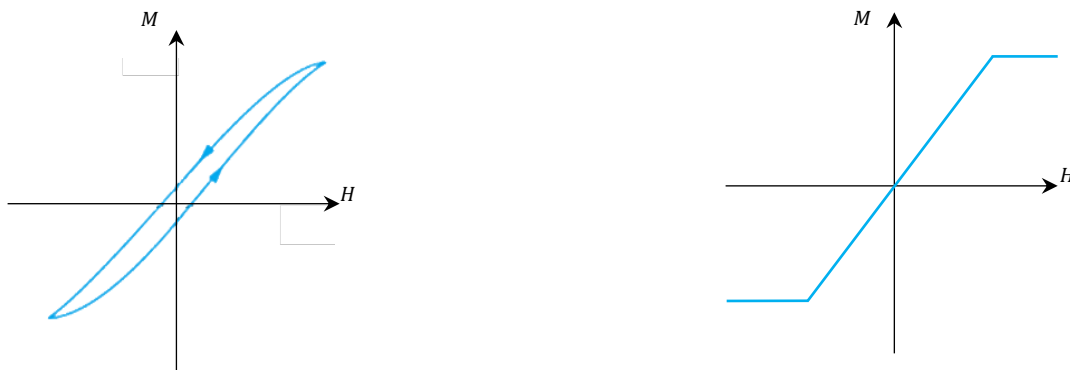


Figure 6: Cycle d'hystérésis du matériau (réel à gauche, idéalisé à droite).

$M$  et  $H$  représentent respectivement la composante de l'aimantation et de l'excitation magnétique dans une même direction.

42. Recopier le cycle idéalisé et faire figurer la norme  $M_{sat}$  de l'aimantation de saturation. Lorsque le matériau est dans la partie linéaire de la caractéristique  $M(H)$  de la figure 6, quelle est la relation entre  $\vec{M}$  et  $\vec{H}$  ? On introduira la susceptibilité magnétique  $\chi$  du matériau.

43. Qu'appelle-t-on un matériau ferromagnétique doux ? Donner un ordre de grandeur typique de la susceptibilité magnétique  $\chi$  d'un tel matériau. Pour un matériau paramagnétique, quel serait l'ordre de grandeur de  $\chi$  ? Et pour un matériau diamagnétique ?

44. Dans la partie linéaire de la caractéristique  $M(H)$ , montrer que le champ  $\vec{B}$ , est également proportionnel à  $\vec{H}$ . On introduira la perméabilité relative  $\mu_r$  que l'on exprimera en fonction de  $\chi$ .

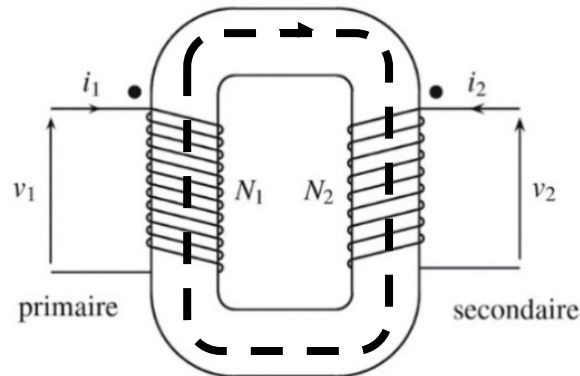
45. Tracer l'allure du cycle d'hystérésis, réel et idéalisé, représentant  $B$  en fonction de  $H$ .

Le matériau ferromagnétique utilisé dans le transformateur représenté figure 5 forme un tore de section circulaire constante  $S$ . On suppose les normes de  $\vec{B}$  et  $\vec{H}$ , notées respectivement  $B$  et  $H$  constantes dans tout le tore ferromagnétique. On note  $\varphi = BS$  le flux du champ  $\vec{B}$  à travers une section du tore. Pour le matériau choisi ici, le champ magnétique arrive à saturation lorsque  $B_{sat} = 1,2$  T.

46. On impose  $N_2 = 300$  spires. Déterminer la section  $S_{min}$  permettant un fonctionnement du transformateur, dans les conditions nominales définies au début de la partie III, sans saturation du matériau ferromagnétique.

On suppose par la suite que l'on a choisi  $S = S_{min}$ .

47. Sur la figure 7 on a représenté une ligne de champ de longueur  $\ell$ . En utilisant cette ligne de champ, obtenir la relation d'Hopkinson :  $N_1 i_1 + N_2 i_2 = \frac{\ell}{\mu_0 \mu_r S} \varphi$ . Que devient cette relation pour un transformateur parfait ?



**Figure 7 : Transformateur étudié. Le trait gras en pointillés dans le tore représente une ligne de champ de longueur  $\ell$ .**

48. Quelle est la valeur du rendement en puissance du transformateur dans le cadre du modèle du transformateur parfait ?

### Étude simplifiée des pertes dans le transformateur

On cherche maintenant à estimer les pertes dans le transformateur. On se limite aux pertes résistives dans les enroulements (les « pertes cuivre ») et par hystérésis dans le matériau (les « pertes fer »). On suppose que les autres « pertes fer » (courants de Foucault) sont négligeables.

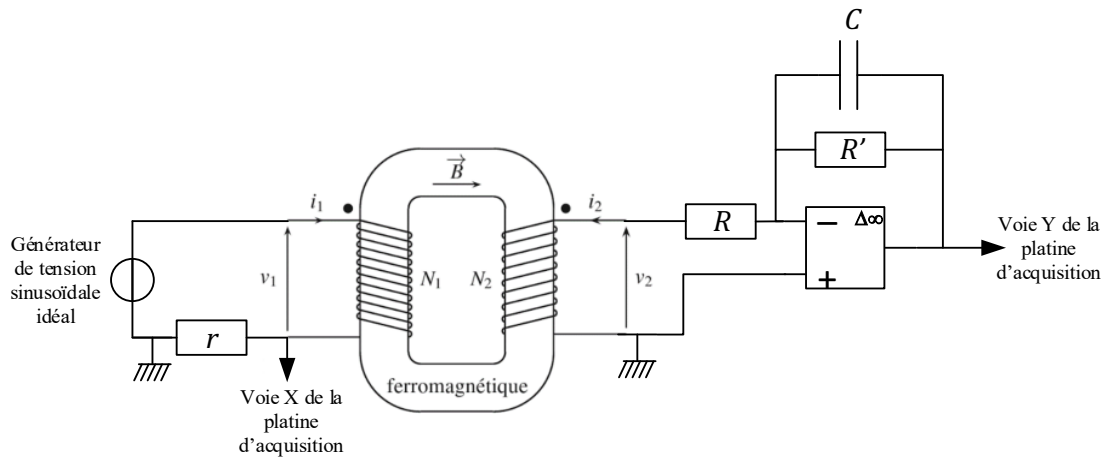
L'enroulement primaire est constitué d'un fil de cuivre de section  $S_1 = 35,0 \text{ mm}^2$  et l'enroulement secondaire d'un fil de cuivre de section  $S_2 = 2,0 \text{ mm}^2$ . On donne la conductivité du cuivre :  $\sigma_{Cu} = 5,9 \times 10^7 \text{ S.m}^{-1}$ . On suppose pour simplifier que toutes les spires ont pour rayon  $a = 3,0 \text{ cm}$ .

49. Dans le cadre de ces hypothèses, exprimer et calculer la puissance totale  $\mathcal{P}_{cuivre}$  dissipée dans les enroulements primaire et secondaire. On prendra  $I_2 = 12 \text{ A}$  comme valeur efficace de l'intensité dans les conditions nominales pour l'enroulement secondaire.

Afin d'estimer maintenant les pertes fer, on propose d'exploiter le relevé du cycle d'hystérésis  $B(H)$  du noyau ferromagnétique du transformateur à l'aide du montage de la figure 8. On le réalise à l'aide d'une platine d'acquisition reliée à un ordinateur.

50. En supposant que  $|N_1 i_1| \gg |N_2 i_2|$ , montrer que la tension  $v_X$  mesurée entre l'entrée de la voie X et la masse est proportionnelle à l'excitation magnétique dans le matériau, selon la relation  $v_X = k_H H$ .

51. Montrer que si la fréquence du générateur de tension est bien choisie, la tension  $v_Y$  mesurée entre l'entrée de la voie Y et la masse est une fonction linéaire du champ magnétique dans le matériau, selon la relation  $v_Y = k_B B + c^{te}$ .

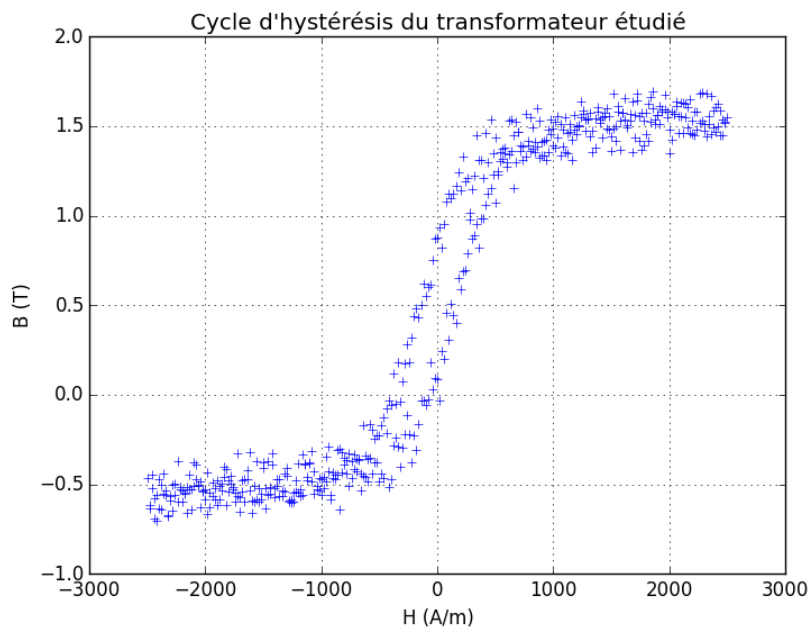


**Figure 8 : Montage proposé pour le relevé du cycle d’hystérésis. On suppose toujours les normes de  $\vec{B}$  et  $\vec{H}$ , notées respectivement  $B$  et  $H$  constantes dans tout le tore ferromagnétique. L’amplificateur linéaire intégré est idéal.**

52. Le transformateur est alimenté à une fréquence  $f = 50$  Hz. Proposer, en la justifiant brièvement, une valeur pour la période  $T_e$  d’échantillonnage des valeurs de  $v_X$  et  $v_Y$ .

Les pertes fer dans le noyau ferromagnétique du transformateur, de volume  $V = 1,5 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3$ , alimenté à la fréquence  $f$ , sont données par la relation :  $\mathcal{P}_{fer} = Vf\mathcal{A}$ . Le terme  $\mathcal{A}$  est égal à l’aire du cycle d’hystérésis dans le plan  $(H, B)$ .

53. Préciser la dimension  $\mathcal{A}$  et son unité dans le système international (S.I.).



**Figure 9 : Relevé du cycle d’hystérésis  $B(H)$  du transformateur**

Afin d’évaluer ce terme  $\mathcal{A}$ , on propose d’utiliser un programme informatique en langage Python.

54. Expliquer, en vous aidant d'un schéma, le principe de calcul approché de l'intégrale sur un segment  $[a, b]$  d'une fonction continue de la variable réelle  $f: x \mapsto f(x)$ . On notera  $p$  le pas d'intégration.

Lors d'une séance de travaux pratiques, deux étudiants proposent les deux codes suivants pour calculer l'aire du cycle ; seul l'un des deux codes s'exécute correctement. On précise que  $H$  et  $B$  sont des données de type `list` (listes ou vecteurs) de même dimension contenant les valeurs numériques de l'excitation et du champ magnétique. Ces valeurs sont stockées dans les unités du système international de  $H$  et  $B$ .

```
aire=0
for i in range(1, len(H)):
    aire+=B[i]*(H[i]-H[i-1])
aire=abs(aire)
print(aire)
```

```
aire=0
i=1
while i<=len(H):
    aire+=B[i]*(H[i]-H[i-1])
aire=abs(aire)
print(aire)
```

**Code informatique proposé par l'étudiant A (à gauche) et B (à droite)**

55. Indiquer le code incorrect et proposer une modification à indiquer à l'étudiant qui rencontre des difficultés dans la mise en œuvre de la méthode numérique d'intégration.

56. Quel est le rôle de l'instruction `aire=abs(aire)` ? Est-elle indispensable ? Justifier la réponse par un argument simple.

Sur le cycle d'hystérésis acquis, le bruit de mesure est observable. On propose aux étudiants de réaliser, avec un même transformateur et un montage identique, dix acquisitions successives et de stocker les valeurs obtenues pour les aires du cycle dans un tableau, recopié ci-dessous.

[662.71, 661.44, 665.52, 687.78, 672.97, 672.23, 666.46, 650.84, 637.25, 634.56]
---

**Valeurs numériques obtenues de l'aire après dix acquisitions successives**

57. La moyenne de ces valeurs est égale à  $661,18 \text{ J}\cdot\text{m}^{-3}$ , l'écart-type est égal à  $15,51 \text{ J}\cdot\text{m}^{-3}$ . Lors de la séance de travaux pratiques, un autre étudiant vous indique avoir trouvé, en appliquant le même protocole sur un transformateur identique, une valeur de  $630,4 \text{ J}\cdot\text{m}^{-3}$  et vous demande votre avis. Que lui répondez-vous ?

58. Dédurre des questions précédentes l'expression et la valeur numérique du rendement du transformateur dans ses conditions nominales de fonctionnement. Commenter.

<i>Fin de l'énoncé.</i>
-------------------------