

C O N C O U R S A T S
-SESSION 2022-

É P R E U V E D E
S C I E N C E S P H Y S I Q U E S

CALCULATRICE INTERDITE

CODE ÉPREUVE : 957

DURÉE DE L'ÉPREUVE : 3H

Phénomènes physiques en montagne

Introduction

Ce sujet propose d'étudier quelques phénomènes physiques rencontrés en montagne. Il est constitué de cinq parties indépendantes. Les différentes sous-parties sont souvent également indépendantes.

Les questions portant la mention **Résolution de problème** ne sont pas guidées et nécessitent de l'initiative de la part du candidat. Les pistes de recherche doivent apparaître sur la copie et, si elles sont pertinentes, seront valorisées. Le barème accorde un poids significatif à ces questions.

I Le profil de pression

I.1 Modèle de l'atmosphère isotherme

La pression atmosphérique décroît avec l'altitude. Cette partie propose d'étudier cet aspect. On choisit un axe z orienté vers le haut, on note $p_0 = 1,0 \text{ bar}$ la pression atmosphérique au niveau du sol (en $z = 0$) et $p(z)$ sa valeur pour une altitude z . On modélise l'atmosphère comme étant :

- statique,
- isotherme (température notée T_0 , prise environ égale à 15°C),
- et se comportant comme un gaz parfait.

Enfin, on note $R = 8,3 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$ la constante des gaz parfaits, $g = 9,8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ l'intensité de la pesanteur, et $M = 29 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$ la masse molaire de l'air.

- 1 - Démontrer, à l'aide d'un bilan des forces sur un volume élémentaire de fluide situé entre les altitudes z et $z + dz$, que la pression satisfait à la relation suivante, où ρ est la masse volumique de l'air :

$$\frac{dp}{dz} = -\rho g. \quad (1)$$

- 2 - Établir la relation entre la masse volumique $\rho(z)$ à l'altitude z , la pression $p(z)$ à cette altitude, T_0 , R et M .
- 3 - Établir l'équation différentielle vérifiée par $p(z)$, puis en déduire que la pression évolue selon la loi $p(z) = p_0 e^{-z/H}$ avec H une constante dont on donnera l'expression en fonction de R , T_0 , g et M .
- 4 - Calculer une valeur approchée de H , sans oublier son unité.

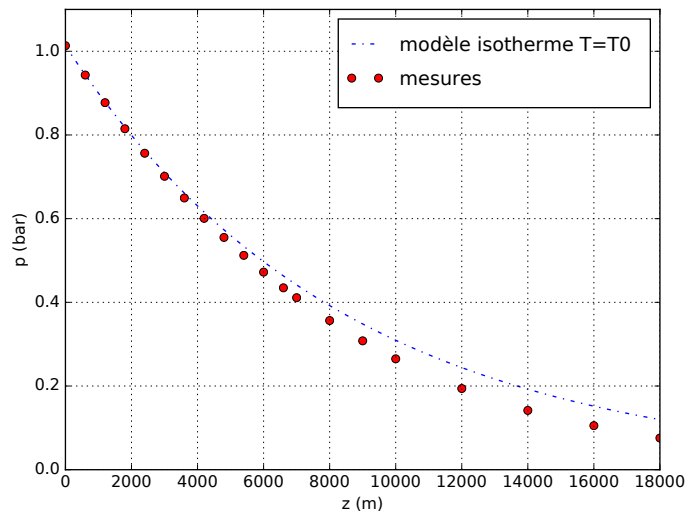
On se propose d'analyser l'accord entre les prévisions du modèle précédent et les relevés expérimentaux. De tels relevés, valables pour des conditions moyennes, sont présentés dans le tableau page suivante (document 1). La pression $p(z)$ donnée par ce tableau est également tracée sur le graphique du document 2, qui comporte aussi un tracé de la pression prédite par notre modèle. On pourra également utiliser le document 3.

- 5 - Jusqu'à quelle altitude les valeurs de la pression obtenues par ce modèle sont-elles en accord à mieux que 10% avec les données expérimentales ?

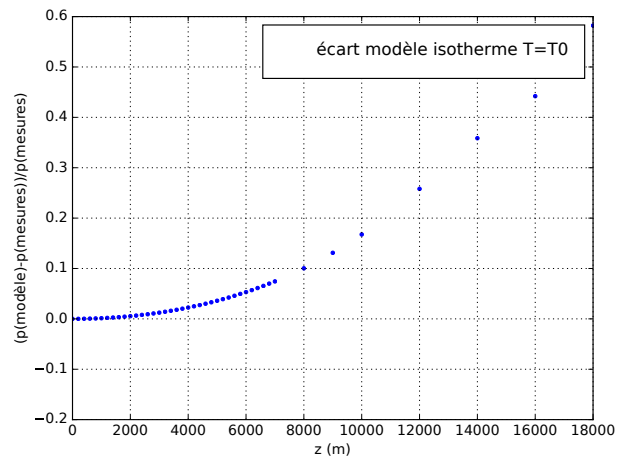
Quelle est l'hypothèse de notre modèle qui semble la moins bien vérifiée, et qui peut expliquer les écarts importants à haute altitude ?

Altitude m	Température °C	Pression kPa	Accélération gravitationnelle g , m/s ²
0	15,00	101,33	9,807
200	13,70	98,95	9,806
400	12,40	96,61	9,805
600	11,10	94,32	9,805
800	9,80	92,08	9,804
1 000	8,50	89,88	9,804
1 200	7,20	87,72	9,803
1 400	5,90	85,60	9,802
1 600	4,60	83,53	9,802
1 800	3,30	81,49	9,801
2 000	2,00	79,50	9,800
2 200	0,70	77,55	9,800
2 400	-0,59	75,63	9,799
2 600	-1,89	73,76	9,799
2 800	-3,19	71,92	9,798
3 000	-4,49	70,12	9,797
3 200	-5,79	68,36	9,797
3 400	-7,09	66,63	9,796
3 600	-8,39	64,94	9,796
3 800	-9,69	63,28	9,795
4 000	-10,98	61,66	9,794
4 200	-12,3	60,07	9,794
4 400	-13,6	58,52	9,793
4 600	-14,9	57,00	9,793
4 800	-16,2	55,51	9,792
5 000	-17,5	54,05	9,791
5 200	-18,8	52,62	9,791
5 400	-20,1	51,23	9,790
5 600	-21,4	49,86	9,789
5 800	-22,7	48,52	9,785
6 000	-24,0	47,22	9,788
6 200	-25,3	45,94	9,788
6 400	-26,6	44,69	9,787
6 600	-27,9	43,47	9,786
6 800	-29,2	42,27	9,785
7 000	-30,5	41,11	9,785
8 000	-36,9	35,65	9,782
9 000	-43,4	30,80	9,779
10 000	-49,9	26,50	9,776
12 000	-56,5	19,40	9,770
14 000	-56,5	14,17	9,764
16 000	-56,5	10,53	9,758
18 000	-56,5	7,57	9,751

Document 1 : propriétés moyennes de l'air à haute altitude – en partie d'après relevés expérimentaux.
(Source : *Thermodynamique, une approche pragmatique*, Çengel et al.)



Document 2 : $p(z)$ d'après les données du tableau du document 1 (points "mesures"), et d'après le modèle du sujet ("modèle isotherme $T = T_0$ ").



Document 3 : tracé de l'écart relatif entre mesures et modèle isotherme : $(p_{\text{modèle}}(z) - p_{\text{mesures}}(z)) / p_{\text{mesures}}(z)$.

I.2 Étude du profil de pesanteur

Nous avons ci-dessus supposé la pesanteur g constante. Or celle-ci est plus faible à haute altitude. Il est possible d'obtenir l'expression de $g(r)$, où r est la distance au centre de la Terre, en étudiant une situation analogue en électrostatique.

On considère ainsi une boule chargée uniformément (densité volumique de charge électrique ρ), de rayon R . Cette distribution de charges produit un champ électrique $\vec{E}$. On utilise les coordonnées sphériques (r, θ, φ) dont le centre O est le centre de la boule.

- 6 - Donner l'expression de la charge électrique totale, notée Q , portée par la boule, en fonction de ρ et de R .
- 7 - En explicitant les invariances et les symétries du problème, donner les variables dont dépend le champ électrique $\vec{E}$, ainsi que sa direction en fonction des vecteurs de la base sphérique.
- 8 - En utilisant le théorème de Gauss, établir l'expression du champ électrique $\vec{E}$ à la fois dans la boule et à l'extérieur.

Le calcul du champ $\vec{E}$ ci-dessus est mathématiquement analogue au calcul du champ de pesanteur $\vec{g}$ produit par une Terre à symétrie sphérique. Il est ainsi possible d'obtenir l'expression de l'intensité de la pesanteur $g(r)$ en fonction de la distance r au centre de la Terre :

$$g(r) = \frac{GM_T}{r^2}, \quad (2)$$

expression valable pour $r \geq R_T$, avec R_T le rayon de la Terre, M_T sa masse, et G la constante de gravitation universelle.

- 9 - En déduire l'expression de g en fonction de l'altitude z par rapport au sol, du rayon terrestre R_T , et de la valeur g_0 de la pesanteur en $z = 0$.
- 10 - À l'aide d'un développement limité à l'ordre 1 en z/R_T , donner l'expression de g pour $z \ll R_T$.
- 11 - De combien la pesanteur a-t-elle diminuée à une altitude de 6,4 km ? On prendra $R_T = 6400$ km. Est-ce en accord avec le tableau de données du document 1 ?

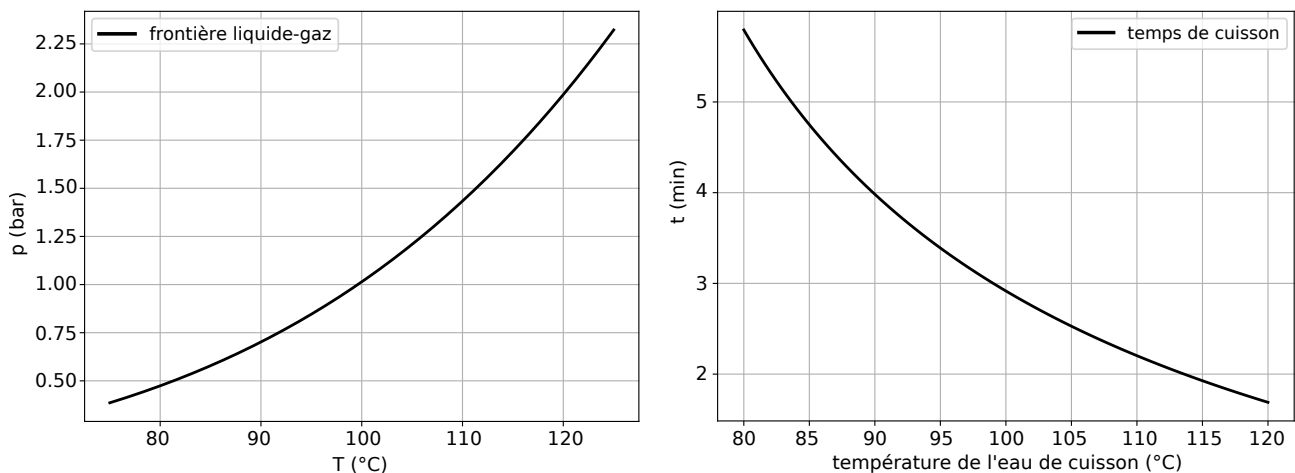
Ces très faibles variations justifient que l'on considère la pesanteur constante dans tout ce sujet.

I.3 Effet de la chute de pression sur la cuisson des aliments

- 12 - Sur votre feuille, dessiner l'allure du diagramme p - T de l'eau, où figurent les trois phases solide, liquide et gaz, le point triple et le point critique.

Des randonneurs préparent leur repas à une altitude de 2400 m. Ils souhaitent manger des œufs à la coque, pour lesquels on conseille traditionnellement une cuisson de 3 minutes dans l'eau bouillante.

La cuisson est bonne quand le jaune d'œuf atteint une température de 63 °C. Un modèle simplifié permet d'obtenir le temps que doit passer l'œuf dans l'eau pour atteindre 63 °C, en fonction de la température de l'eau dans laquelle il est plongé pour la cuisson (courbe ci-dessous à droite).



Document 4.

Gauche : zoom sur une portion du diagramme p - T de l'eau.

Droite : temps de cuisson pour obtenir un œuf à la coque, en fonction de la température de l'eau de cuisson
(source : <http://newton.ex.ac.uk/teaching/CDHW/egg/>).

- 13 - (**Résolution de problème**) Expliquer pourquoi le temps usuel de trois minutes ne sera pas adapté ici, et donner le temps de cuisson des œufs pour nos deux randonneurs. On utilisera au besoin tout document de la partie I.

II Effet de foehn

Lorsqu'un courant aérien rencontre un relief large, il s'élève, se détend et se refroidit. Puis en redescendant sur l'autre versant il est comprimé et se réchauffe. Dans certaines conditions qui brisent la symétrie (formation de nuages ou précipitations sur un des versants seulement), l'air redescendant peut arriver en bas avec une température significativement plus élevée qu'elle ne l'était en bas de l'autre versant : ce vent chaud et sec est appelé foehn. Il est très courant dans les vallées alpines, ainsi que dans d'autres régions du monde où il est nommé différemment. On en propose une étude dans cette partie.

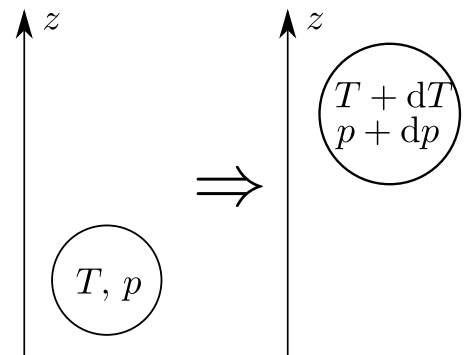
Dans toute cette partie on modélise l'air comme un gaz parfait de masse molaire $M = 29 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$ et d'indice adiabatique (rapport des capacités thermiques à pression constante et à volume constant) $\gamma = 1,4$. On note $R = 8,3 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$ la constante des gaz parfaits, et $g = 9,8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ l'intensité de la pesanteur.

II.1 Gradient adiabatique sec

On s'intéresse d'abord aux variations de température subies par un volume d'air ascendant. On considère un axe z orienté vers le haut, $z = 0$ étant au niveau du sol.

On considère un volume élémentaire de fluide qui consiste en un volume fermé V d'air, situé à l'altitude z . Ce volume d'air est initialement à l'équilibre mécanique et thermique avec le reste de l'atmosphère, et on note $\rho(z)$, $p(z)$ et $T(z)$ sa masse volumique, pression et température.

On suppose que le volume d'air s'élève brusquement d'une très petite hauteur dz . On note dp et dT les variations de pression et de température associées. On suppose cette transformation adiabatique et réversible.



Document 5

14 - Quelle est la caractéristique de la transformation qui permet de la supposer adiabatique ?

15 - Indiquer les conditions d'application de la loi de Laplace.

En partant de la relation de Laplace qui relie pression et volume, établir la relation qui relie pression et température.

16 - En déduire la relation suivante entre variation de pression et de température pour le mouvement considéré : $(1 - \gamma) \frac{dp}{p} + \gamma \frac{dT}{T} = 0$.

17 - En déduire une expression de $\frac{dT}{dz}$ en fonction de $\frac{dp}{dz}$, γ , M , ρ et R .

18 - En utilisant la relation (1) de la partie I, et la relation trouvée à la question précédente, en déduire une expression de $\frac{dT}{dz}$ qui fait intervenir uniquement γ , M , g et R .

19 - Calculer la valeur numérique approchée de $\frac{dT}{dz}$ et l'exprimer en kelvins par kilomètre.

La valeur obtenue est appelée "gradient adiabatique sec", et donne la variation de température par kilomètre d'altitude lorsqu'une masse d'air s'élève de façon adiabatique et réversible.

II.2 Effet des précipitations

On suppose maintenant que la masse d'air possède une certaine humidité lorsqu'elle est au niveau du sol, et qu'en s'élevant la vapeur d'eau contenue dans l'air va se condenser sous forme liquide. On souhaite évaluer l'effet thermique de cette liquéfaction.

On donne :

- l'enthalpie massique de vaporisation de l'eau : $h_{\text{vap}} = 2,3 \times 10^6 \text{ J} \cdot \text{kg}^{-1}$, supposée indépendante de la température,
- la capacité thermique massique à pression constante de l'air dans les conditions considérées ici : $c_p = 1,0 \times 10^3 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{kg}^{-1}$.

On considère le système isolé constitué de :

- une masse m_{air} d'air,
- une masse m_{vap} de vapeur d'eau ($\text{H}_2\text{O}_{(\text{g})}$), très petite devant m_{air} .

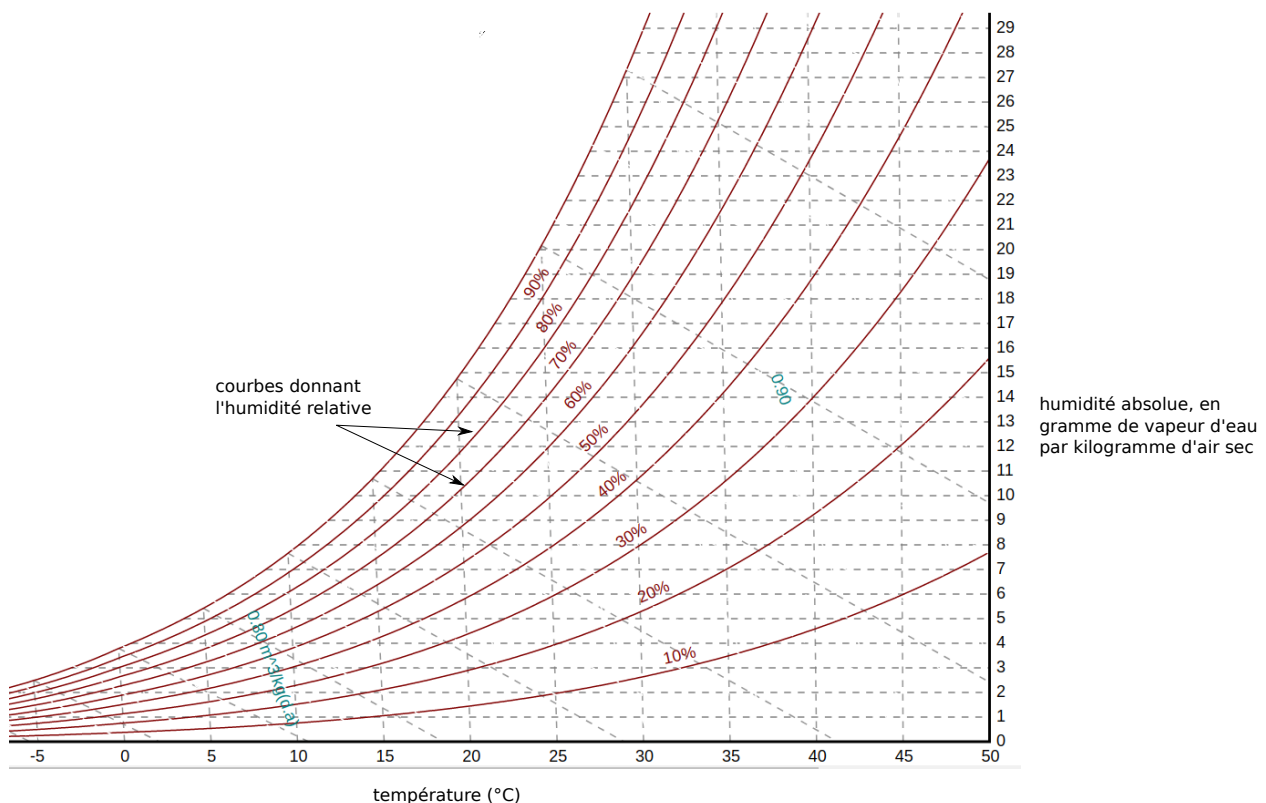
20 - On suppose que la masse m_{vap} de vapeur d'eau se liquéfie, à température et pression constantes, et que les seuls échanges thermiques qui ont lieu prennent place entre l'eau et l'air du système. En effectuant un bilan sur le système {eau}, donner l'expression du transfert thermique reçu par la masse d'air lors de cette transformation.

21 - En supposant que l'air seul reçoit le transfert thermique précédent, de façon isobare, en déduire l'expression de son élévation de température ΔT en fonction de $m_{\text{vap}}/m_{\text{air}}$, h_{vap} et c_p .

Dans l'expression précédente, le rapport $m_{\text{vap}}/m_{\text{air}}$ est appelé "humidité absolue" de l'air, souvent exprimée en gramme par kilogramme. Par exemple une humidité absolue de 20 g/kg signifie 20 g de vapeur d'eau par kilogramme d'air sec, soit donc $m_{\text{vap}}/m_{\text{air}} = 20 \times 10^{-3}$.

L'humidité relative de l'air est un autre paramètre mesuré par les météorologues. Elle s'exprime souvent en pourcentage, et elle dépend de l'humidité absolue et de la température.

Le diagramme psychrométrique ci-dessous permet d'obtenir l'humidité absolue en connaissant la température de l'air et son humidité relative.



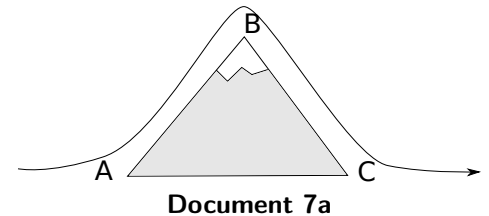
Document 6, d'après <http://www.flycarpet.net/en/PsyOnline>.

- 22** - Exploiter le graphique ci-dessus pour donner la valeur de $m_{\text{vap}}/m_{\text{air}}$ pour 20°C et 70% d'humidité relative.
- 23** - En utilisant la valeur précédente du ratio $m_{\text{vap}}/m_{\text{air}}$, faire l'application numérique pour ΔT .
- 24** - Pourquoi aurait-on pu prévoir dès le départ que $\Delta T > 0$?

II.3 Effet de foehn

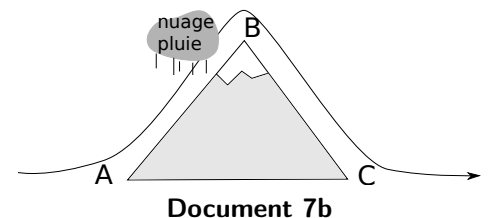
On s'intéresse enfin à l'effet de foehn. On considère d'abord un cas où l'atmosphère est sèche. On se place dans le cadre de la partie II.1. À cause du vent, une parcelle d'air s'élève le long d'une montagne dont le sommet est à l'altitude $h = 1000\text{ m}$ (document 7a). On modélise cette élévation comme étant adiabatique et réversible.

On prend par exemple $T_A = 20^\circ\text{C}$.

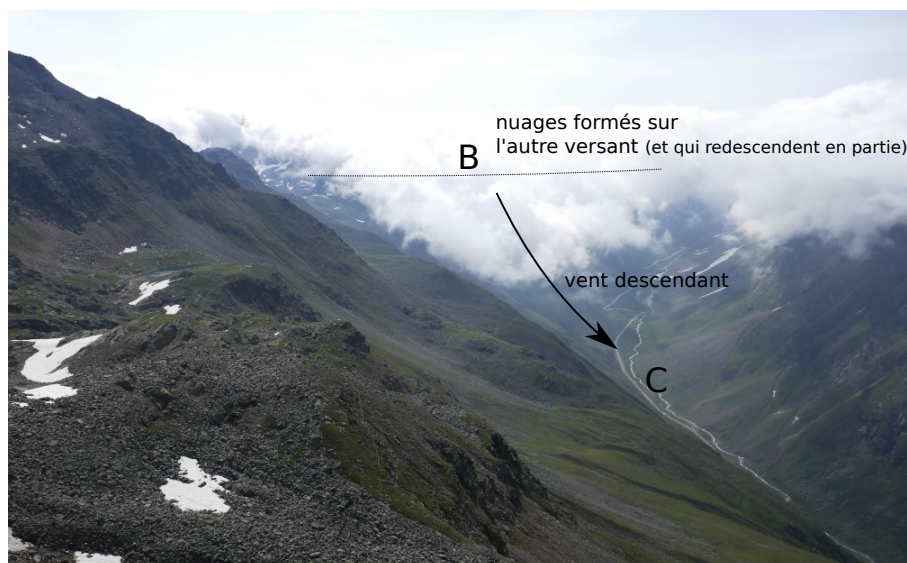


- 25** - Quelle est la valeur de la température de la parcelle d'air en B ?
- 26** - La parcelle d'air redescend ensuite sur l'autre flanc de la montagne et retourne en $z = 0$ (point C , de même altitude que A). Quelle est la valeur de la température en C ? Commenter.

On se place ensuite dans un cas où l'air en A est humide. En montant sur le flanc de la montagne, sa température chute et la vapeur d'eau qu'il contient se liquéfie. On suppose qu'une fois en B , cette vapeur d'eau s'est totalement liquéfiée et a été évacuée sous forme de nuage ou de pluie. L'air est alors sec au point B et effectue sa descente jusqu'en C (cf. document 7b).



- 27** - Estimer la valeur de la température en C . Commenter.



Document 8 : exemple de manifestation de l'effet de foehn dans les Alpes. On voit nettement la formation de nuages sur le versant ascendant (versant non visible sur la photographie), alors qu'ils sont relativement absents du versant descendant (qui est celui visible sur la photographie).

III La grêle

Les orages en montagne sont courants, et il arrive régulièrement qu'ils soient accompagnés de chutes de grêle. La grêle est constituée de blocs de glace, appelés grêlons, de formes variées et de tailles pouvant aller de quelques millimètres à plusieurs centimètres. Ces blocs se forment au sein des nuages, à des altitudes comprises entre 1 et 10 km. Leur vitesse de chute au sol avoisine les 100 km/h pour des grêlons de 4 à 8 centimètres de diamètre. Cette partie s'intéresse à la modélisation de leur chute.

III.1 Chute sans frottement

On considère un grêlon de masse m , qui chute dans le champ de pesanteur $\vec{g}$. On note z un axe *descendant* vers le sol. $z = 0$ marque la position initiale du grêlon lorsqu'il est lâché dans le nuage. La vitesse initiale est nulle. On note $\vec{e}_z$ un vecteur unitaire orienté vers le bas.

On néglige ici tout frottement.

- 28 - Donner l'expression de l'énergie potentielle de pesanteur du grêlon (on choisira une énergie potentielle nulle en $z = 0$).
- 29 - Par une méthode énergétique, établir l'expression de la vitesse du grêlon en fonction de z .
- 30 - Estimer la valeur de cette vitesse après une chute de 1 km. Est-ce en accord avec ce qui est rapporté ci-dessus ? Quelle hypothèse n'est pas raisonnable ?

III.2 Chute avec frottements quadratiques

On conserve les mêmes notations que précédemment, mais on rend cette fois compte des frottements entre le grêlon et l'air. On note $\vec{v} = v(t) \vec{e}_z$ la vitesse du grêlon. La force de frottement de l'air sur le grêlon peut s'écrire :

$$\vec{f} = -\alpha v^2 \vec{e}_z.$$

Pour les vitesses atteintes par les grêlons, des études en soufflerie sur des sphères montrent que le coefficient α est donné par $\alpha = \frac{1}{2} \rho_{\text{air}} \pi R^2 C$, avec ρ_{air} la masse volumique de l'air, R le rayon du grêlon et $C \simeq 0,5$.

- 31 - Établir l'équation différentielle portant sur la vitesse $v(t)$ du grêlon.
- 32 - Sans résoudre cette équation, montrer qu'il existe une solution où la vitesse est constante. On note v_{lim} cette constante. On donnera son expression en fonction de α , m et g .

On admet que, quelles que soient les conditions initiales, la vitesse du grêlon tend vers la vitesse v_{lim} , appelée vitesse limite.

On étudie ensuite le mouvement du grêlon à l'aide d'une résolution numérique. Les hypothèses et notations sont toujours celles de la partie III.2. On utilise pour cela la méthode d'Euler, dans un algorithme écrit en Scilab retranscrit ci-dessous :

```

g = 9.8
alpha = 1.5e-3
m = 0.24
dt = 0.02 // pas d'intégration en secondes
fin = 15 // durée de la simulation en secondes

t(1) = 0 // temps initial
z(1) = 0 // position initiale
v(1) = 0 // vitesse initiale

nb_iterations = int(fin/dt)
for i=1:nb_iterations
    t(i+1) = t(i) + dt
    z(i+1) = [case 1 à compléter]
    v(i+1) = [case 2 à compléter]
end

```

Les valeurs de m et α sont ici données en unités S.I. et sont valables pour un grêlon de diamètre 8 cm.

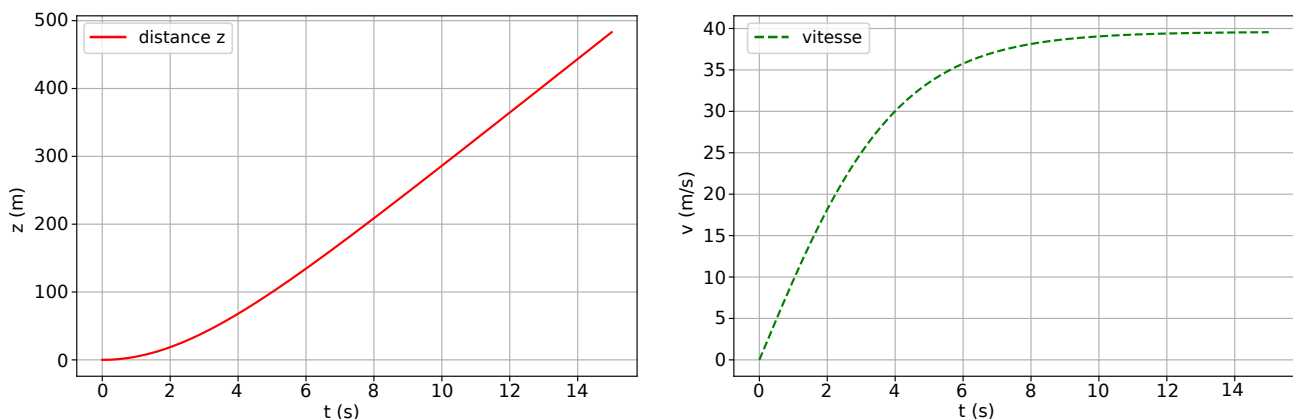
33 - Compléter la case 1 de l'algorithme.

34 - Compléter la case 2 de l'algorithme.

35 - Les graphiques ci-dessous sont ceux de la position $z(t)$ et de la vitesse $v(t)$ obtenus par l'algorithme.

La vitesse limite obtenue est-elle compatible avec les observations ?

Déterminer la distance z au bout de laquelle le grêlon atteint 75% de sa vitesse limite.



Document 9 : position $z(t)$ et vitesse $v(t)$ au cours de la chute d'un grêlon de 8 cm de diamètre, courbes obtenues en traçant les résultats de l'algorithme d'Euler ci-dessus.

IV Effets magnétiques et thermiques de la foudre

La foudre se manifeste particulièrement en montagne, milieu propice à la formation de nuages d'orage.

IV.1 Effet de tension induite

La foudre peut causer des dégâts matériels de plusieurs façons. L'une d'elle est par un effet de tension induite dans les circuits électriques avoisinants. Ces circuits peuvent être l'installation électrique d'un refuge de montagne, ou les accessoires électroniques du randonneur.

Pour étudier ceci, on modélise d'abord le coup de foudre comme un fil rectiligne infini, d'axe z vertical ascendant, parcouru par un courant I constant et dirigé dans le sens des z croissants. On se place dans le vide. On utilise un système de coordonnées *cylindriques* d'axe z . La perméabilité magnétique du vide est $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ H} \cdot \text{m}^{-1}$.

36 - En utilisant les symétries et invariances du problème, déterminer la direction du champ magnétique produit par le fil, et les variables dont il dépend.

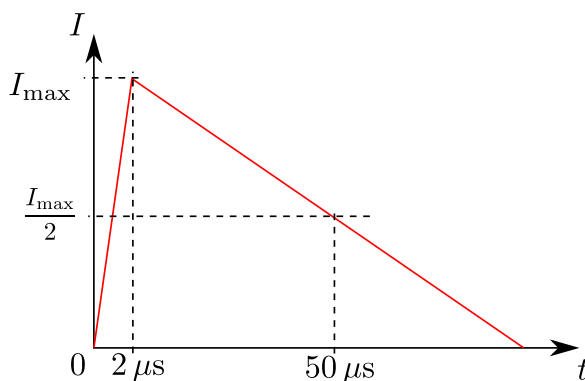
37 - Déterminer ensuite l'expression du champ magnétique $\vec{B}$ produit à l'extérieur du fil.

Le courant I n'est en réalité pas constant. On admet toutefois que l'expression précédente du champ magnétique reste valable à chaque instant en remplaçant I par $I(t)$.

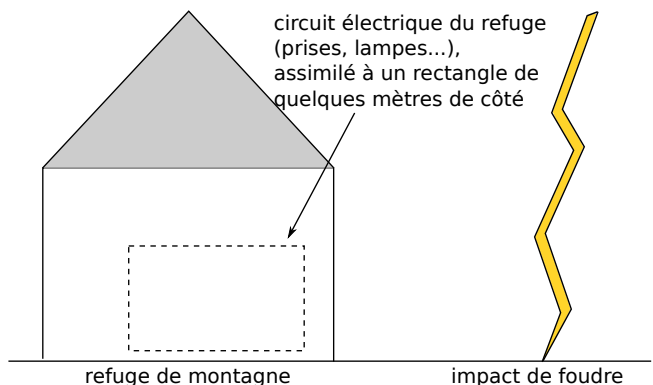
38 - (**Résolution de problème**) En utilisant notamment les deux schémas ci-dessous, et en proposant des ordres de grandeur raisonnables pour les dimensions considérées, estimer la valeur maximale de la force électromotrice (ou tension) induite dans le circuit électrique d'un refuge de montagne, si le coup de foudre tombe à une distance $d = 10 \text{ m}$ de celui-ci.

Commenter le résultat.

Remarque : on commencera par identifier les effets et lois physiques en jeu. On effectuera des approximations pour rendre les calculs simples.



Document 10a : profil standardisé de l'intensité $I(t)$ délivrée par un coup de foudre, utilisé pour les études de risques dans les installations électriques. On pourra prendre $I_{\text{max}} = 50 \text{ kA}$.



Document 10b : vue schématique de la situation.

IV.2 Échauffement d'un fil parcouru par un fort courant

Que ce soit par effet de tension induite ou par passage direct de la décharge électrique, la foudre engendre de forts courants dans les câbles électriques des habitations ou du réseau. Nous allons ici estimer le courant maximal que peut supporter un fil avant de fondre.

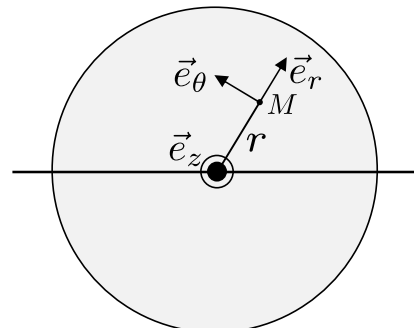
On considère un fil électrique en cuivre, cylindrique, de rayon $R = 2,0 \text{ mm}$. Il est parcouru par un courant stationnaire I orienté dans le sens des z croissants. On utilise des coordonnées cylindriques dont l'axe Oz est celui du fil (cf schéma).

Grandeurs caractéristiques du cuivre :

- conductivité thermique $\lambda = 400 \text{ W} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{m}^{-1}$,
- conductivité électrique $\gamma = 6 \times 10^7 \text{ S} \cdot \text{m}^{-1}$,
- température de fusion sous 1 bar : $T_{\text{fus}} = 1085^\circ \text{C}$.

On donne l'expression du gradient en coordonnées cylindriques pour une fonction ne dépendant que de r :

$$\overrightarrow{\text{grad}} f = \frac{df}{dr} \vec{e}_r.$$



Document 11 : vue en coupe du fil.

- 39** - On suppose que le vecteur densité de courant $\vec{j} = j\vec{e}_z$ est uniforme au sein du fil. Établir son expression en fonction de I , R et $\vec{e}_z$.
- 40** - La puissance dissipée par effet Joule, par unité de volume, est donnée par $p_J = \vec{j} \cdot \vec{E}$ où $\vec{E}$ est le champ électrique dans le conducteur. Rappeler l'expression de la loi d'Ohm locale et l'utiliser pour donner une expression de p_J en fonction de I , R et d'une grandeur caractéristique du cuivre.

Pour obtenir le profil de température $T(r)$ en fonction de la distance radiale r , il faut d'abord établir l'équation de la chaleur dans le fil. Il y a ici deux différences par rapport au cas à une dimension cartésienne et sans terme source : les coordonnées sont cylindriques (dépendance en r) et il y a présence d'un chauffage volumique p_J . On admet alors que l'équation de la chaleur est la suivante, en régime stationnaire :

$$\frac{d}{dr} \left(r \frac{dT}{dr} \right) = -\frac{r p_J}{\lambda}.$$

De plus, le fil est refroidi par un transfert conducto-convectif avec l'air sur sa périphérie, selon la loi de Newton qui donne l'expression du vecteur densité de flux thermique en $r = R$:

$$j_{\text{th}}(R) = h(T(R) - T_{\text{ext}}),$$

avec T_{ext} la température extérieure, égale à 20°C , et $h = 10 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-1}$.

- 41** - Résoudre l'équation de la chaleur pour obtenir une expression de $T(r)$. On exprimera la ou les constantes d'intégration en fonction de $T_0 = T(r = 0)$ (température au centre du fil).
- 42** - En utilisant la condition aux limites en $r = R$, établir une expression de T_0 en fonction de p_J , R , h , λ et T_{ext} .
- 43** - À quelle condition sur R , λ et h peut-on simplifier l'expression précédente de T_0 sous la forme :

$$T_0 \simeq T_{\text{ext}} + \frac{p_J R}{2h}.$$

Cette condition est-elle vérifiée ici ?

- 44** - En déduire l'expression du courant à partir duquel le fil de cuivre fond, puis une valeur numérique approchée.

V Station de transfert d'énergie par pompage

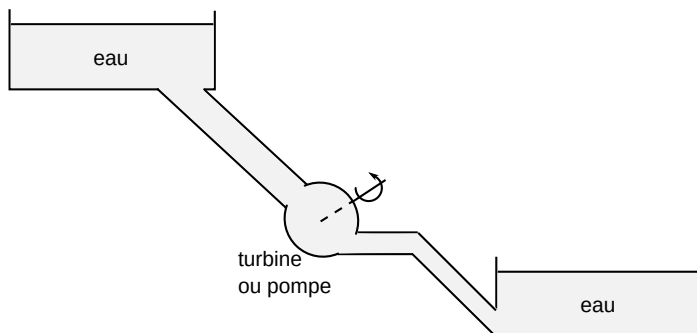
La montagne est un espace largement aménagé. Nous étudions ici un dispositif de stockage d'énergie appelé station de transfert d'énergie par pompage (STEP). Il s'agit de deux retenues d'eau situées à des altitudes différentes, entre lesquelles est construite une conduite. Deux modes de fonctionnement sont possibles :

- (1) passage de l'eau du réservoir haut au réservoir bas, ce qui permet, via une turbine et un alternateur, de produire de l'énergie électrique ;
- (2) passage de l'eau du réservoir bas au réservoir haut, à l'aide d'une pompe alimentée par le réseau électrique.

L'intérêt est de disposer d'un moyen de stockage de l'énergie : le mode (1) est activé lors des pics de consommation pour produire une puissance électrique, alors que le mode (2) permet de profiter de la puissance électrique produite par des sources intermittentes (éoliennes...) qui sinon serait gâchée lors d'heures creuses, en l'exploitant pour faire remonter l'eau.

Nous étudions la STEP du lac Noir située dans les Vosges. Première centrale de ce type en France, elle n'est aujourd'hui plus en fonctionnement. Une conduite relie le lac Blanc (altitude 1050 m) au lac Noir (altitude 950 m).

Les altitudes seront repérées par rapport à un axe z ascendant. On note p_0 la pression atmosphérique uniforme, ρ la masse volumique de l'eau, g la pesanteur. Pour les applications numériques on prendra des valeurs usuelles.



Document 12 : schéma de principe de la station de pompage, avec les deux lacs.



Document 13 : situation réelle sur une carte topographique IGN.

45 - Rappeler l'expression de la relation de Bernoulli entre un point A et un point B d'un écoulement, sans élément actif et sans pertes de charge, ainsi que les hypothèses sous lesquelles elle s'applique.

46 - La station dispose d'un mode "direct", utilisé en cas de trop plein : l'eau est acheminée sans passer par une turbine ou une pompe. Elle arrive au lac inférieur à l'air libre (image ci-contre). Déterminer l'expression, puis une valeur approchée, de la vitesse de l'eau en sortie.

47 - Le diamètre de la conduite de sortie est d'environ 2 m. Le volume du lac haut est d'environ $3 \times 10^6 \text{ m}^3$. Quelle durée est approximativement nécessaire pour le vider ?



Document 14.

On considère maintenant la station fonctionnant en mode (1) : la turbine extrait au fluide une puissance $\mathcal{P} > 0$. La conduite est immergée dans la retenue haute et dans la retenue basse (cf document 12).

- 48 - Établir l'expression de cette puissance en fonction des données du problème et du débit volumique D_v dans la conduite. On pourra négliger les vitesses à la surface de chaque lac.
- 49 - EDF annonce un débit nominal de $60 \text{ m}^3/\text{s}$. Faire alors l'application numérique approchée pour $\mathcal{P}$, en prenant $g = 10 \text{ m/s}^2$.
- 50 - EDF indique que la puissance réelle est de 55 MW : proposer une explication quant à la différence avec la valeur que nous venons d'obtenir (différence qui n'est pas expliquée par l'approximation sur g).
- 51 - Estimer alors la puissance *réelle* nécessaire lors de la phase de pompage (pour un débit de $60 \text{ m}^3/\text{s}$).
