

C O N C O U R S A T S
-SESSION 2018-

É P R E U V E D E
S C I E N C E S P H Y S I Q U E S

CALCULATRICE INTERDITE

CODE ÉPREUVE : 957

DURÉE DE L'ÉPREUVE : 3H

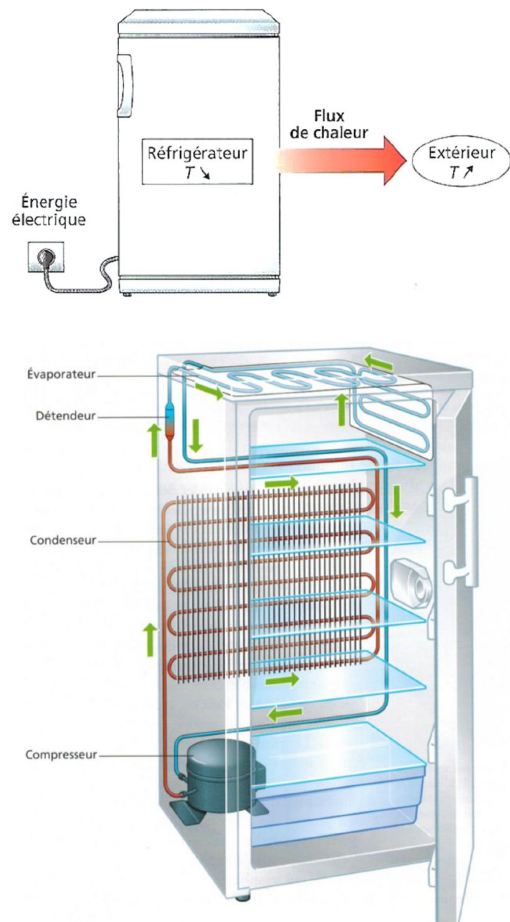
Physique en cuisine

Ce sujet est constitué de 5 parties totalement indépendantes abordant chacune un objet physique rencontré dans une cuisine.

- 1^e partie : Quelques aspects thermodynamiques du réfrigérateur à compresseur

Dans cette partie, on souhaite analyser le principe de fonctionnement du réfrigérateur à compresseur en s'appuyant d'extraits du livre « *La physique par les objets quotidiens* » de C. Ray et J.C. Poizat.

Le principe du réfrigérateur est simple : il assure un transfert de chaleur depuis ses compartiments internes, qui se refroidissent, vers la pièce où il se trouve, qui se réchauffe. Ce transfert consomme de l'énergie électrique. [...]. Le compresseur comprime le fluide réfrigérant, alors froid et sous forme gazeuse, ce qui augmente sa température et sa pression. A la sortie du compresseur, le fluide est donc chaud et à haute pression. [...] Ce gaz chaud et à haute pression circule ensuite à travers le condenseur, où il cède de la chaleur par diffusion vers l'extérieur et subit un changement d'état : le gaz se transforme en un liquide chaud sous haute pression. La condensation (plus exactement la liquéfaction) peut se produire à température élevée car la pression est importante. [...] En poursuivant son chemin dans le circuit frigorifique, le liquide passe ensuite à travers un détendeur qui abaisse sa pression et sa température, ([...] la détente adiabatique s'effectue dans un fin capillaire). On obtient un mélange liquide-gaz à l'équilibre. Après cette chute de pression, le mélange liquide-gaz froid traverse l'évaporateur où il absorbe la chaleur de l'intérieur du réfrigérateur pour subir un second changement d'état : le liquide se met à bouillir, c'est-à-dire qu'il se vaporise. On obtient alors un gaz froid et à basse pression, qui repart dans le compresseur pour un nouveau cycle.



A) Principe de fonctionnement du réfrigérateur à compresseur

Le réfrigérateur est supposé être une machine cyclique et ditherme. Pour un cycle complet, on note Q_1 le transfert thermique reçu par le fluide réfrigérant de la part du milieu extérieur, Q_2 le transfert thermique reçu par le fluide réfrigérant de la part de l'intérieur du réfrigérateur et W le travail de compression permettant de faire fonctionner le réfrigérateur.

- 1) Identifier le nom des organes (compresseur, détendeur, condenseur ou évaporateur) dans lesquels les transferts d'énergie Q_1 , Q_2 et W s'opèrent.
- 2) Préciser si Q_1 , Q_2 et W sont positifs ou négatifs.

- 3) Le compresseur met en jeu une compression rapide que l'on peut supposer adiabatique. Proposer une explication de l'augmentation de la température du gaz supposé parfait à l'issue de cette compression.
- 4) Dessiner l'allure du diagramme $P(T)$ pour le seul équilibre liquide / gaz et préciser les phases dans chaque partie du diagramme et sur la courbe $P(T)$. A quelle condition une liquéfaction peut-elle s'observer à « température élevée » ?
- 5) Définir le coefficient de performance, noté CoP , du réfrigérateur puis l'exprimer en fonction de Q_1 et Q_2 .

On suppose le régime stationnaire atteint : la température T_{ext} de l'extérieur et la température de consigne T_{int} à l'intérieur du réfrigérateur sont constantes.

- 6) Déterminer l'expression du coefficient de performance maximal du réfrigérateur, noté CoP_c , en fonction de T_{int} et T_{ext} .
- 7) Calculer ce CoP_c si $T_{ext} = 25\text{ °C}$ et $T_{int} = 5\text{ °C}$.

B) Etude du cycle du fluide réfrigérant dans un diagramme entropique $T(s)$

Nous allons étudier plus précisément les différentes transformations que le fluide réfrigérant subit. L'écoulement du fluide réfrigérant est stationnaire, de débit massique D_m . Les variations d'énergies cinétique et potentielle du fluide seront négligées. Nous supposons également que le fluide réfrigérant décrit le cycle suivant (on note $\{T_i, P_i\}$ le couple température-pression relatif à l'état i du fluide) :

- Avant d'entrer dans le compresseur, le fluide est un gaz surchauffé (état $A\{T_A, P_A\}$). Le compresseur impose une compression adiabatique et irréversible. Le fluide reste à l'état gazeux (état $B\{T_B, P_B\}$).
- Le fluide circule ensuite dans le condenseur où il opère un refroidissement isobare puis une liquéfaction complète isobare (et donc isotherme) à la pression P_B . On obtient un liquide saturant (état $C\{T_C, P_C\}$).
- Le liquide subit une détente isenthalpique (détente de type Joule-Thomson sans travail indiqué et sans transfert thermique) faisant apparaître un mélange diphasé après avoir traversé le détendeur (état $D\{T_D, P_D\}$).
- Le fluide pénètre dans l'évaporateur et évolue de manière isobare jusqu'à l'état A .

On prendra les valeurs suivantes : $P_A = 2\text{ bar}$, $P_B = 7\text{ bar}$, $T_A = 5\text{ °C}$, $T_B = 55\text{ °C}$ et $D_m = 10^{-2}\text{ kg.s}^{-1}$. Une tolérance de $\pm 2\text{ kJ.kg}^{-1}$ sur la lecture de l'enthalpie massique sera acceptée. Une tolérance de $\pm 1\text{ °C}$ sur la lecture des températures sera acceptée.

On rappelle, en tenant compte de nos hypothèses de travail, le premier principe de la thermodynamique appliqué à un fluide en écoulement dans une conduite, recevant une puissance thermique P_{th} et une puissance mécanique P_{meca} (mise en jeu par les éventuelles parties mobiles d'une machine présente dans la conduite) avec h_e et h_s les enthalpies massiques du fluide à l'entrée et à la sortie de la conduite :

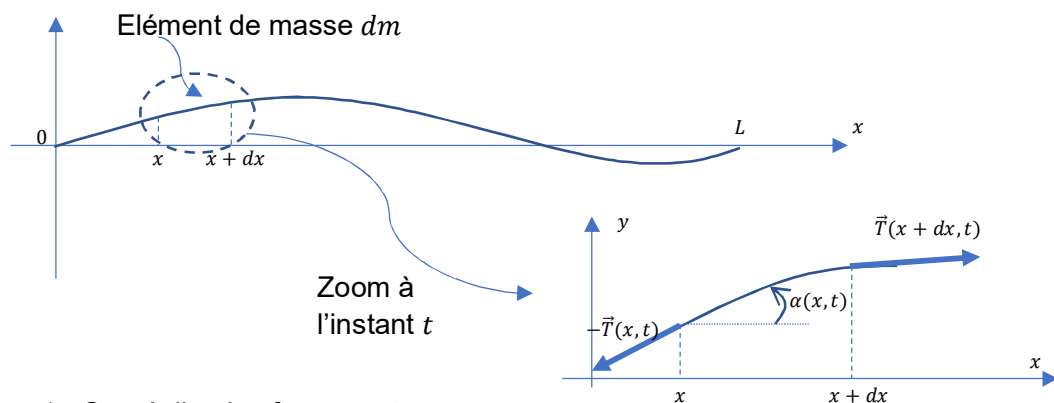
$$D_m(h_s - h_e) = P_{th} + P_{meca}$$

- 8) Repérer sur le diagramme entropique fourni en document-réponse les domaines liquide, diphasique et gazeux.

- 9) Reporter la position des points A, B, C et D sur le document-réponse fourni en annexe et à rendre avec la copie.
- 10) Donner, par lecture sur le diagramme entropique, la température T_l de liquéfaction du fluide réfrigérant observée pour le cycle étudié.
- 11) Donner, par lecture sur le diagramme entropique, la température T_v de vaporisation du fluide réfrigérant observée pour le cycle étudié.
- 12) Exprimer puis calculer la puissance $P_{th,2}$ reçue par le fluide pendant la transformation menant de l'état D à l'état A .
- 13) Exprimer puis calculer la puissance P_{meca} reçue par le fluide pendant la transformation menant de l'état A à l'état B .
- 14) Exprimer puis calculer la puissance $P_{th,1}$ reçue par le fluide pendant la transformation menant de l'état B à l'état C .
- 15) Les résultats précédents, aux incertitudes de lecture près, permettent d'écrire $P_{meca} \approx -(P_{th,1} + P_{th,2})$. Commenter cette relation.
- 16) En déduire l'expression puis une estimation de la valeur du coefficient de performance CoP_{vrai} (un seul chiffre significatif sera accepté pour la valeur de CoP_{vrai}).
- 17) Les résultats précédents impliquent que $CoP_{vrai} < CoP_c$. Interpréter ce résultat.
- 18) Lors d'un processus adiabatique, on peut déterminer, à l'aide du diagramme entropique, le travail massique w_f des forces de viscosité du fluide car $w_f = - \int_{Etat\ ini \rightarrow Etat\ final}^{adia} T ds$. Estimer la puissance P_f associée à ces forces de viscosité lors de la compression (pour ce calcul la représentation de la transformation menant de l'état A à B sera linéarisée et donc assimilée à un simple segment reliant les points A et B). Commenter ce dernier résultat.

2^e partie : De la corde vibrante au principe du four micro-ondes

Dans un premier temps, on souhaite étudier le mouvement vertical d'une corde de masse linéique μ uniforme. Pour cette étude, on étudie un élément de masse dm de la corde, de longueur $d\ell$ et on impose les hypothèses suivantes :



- Hypothèse 1 : On néglige les frottements.
- Hypothèse 2 : La corde, supposée infiniment souple, est constamment tendue. Chaque élément de la corde est alors soumis à des forces de tension tangentes en tout point à la corde. On note $\vec{T}(x,t)$ la tension qu'exerce à un instant t la partie de la corde d'abscisse supérieure à x sur la partie de la corde d'abscisse inférieure à x .

- Hypothèse 3 : Le poids de chaque élément de la corde est négligeable par rapport aux tensions s'exerçant de part et d'autre de ce brin de corde.
- Hypothèse 4 : On néglige le déplacement horizontal (dans le référentiel d'étude supposé galiléen). Un point de la corde est repéré à l'équilibre par $(x, 0)$ et est repéré hors équilibre par $(x, y(x, t))$.
- Hypothèse 5 : Le déplacement vertical $y(x, t)$ est faible. L'angle $\alpha(x, t)$ est supposé petit de sorte qu'il est légitime d'effectuer un développement limité à l'ordre 1 par rapport à cet angle.

Il est demandé, pour les questions 19 et 20 une rédaction rigoureuse au cours de laquelle le candidat précise l'hypothèse (1, 2, 3, 4 ou 5) qu'il utilise à chaque étape importante de son raisonnement.

19) En appliquant le principe fondamental de la dynamique à la partie de corde située entre x et $x + dx$, et en le projetant sur l'axe horizontal, montrer que la tension est uniforme le long de la corde.

Pour la suite, on notera T_0 la norme, uniforme et constante, de la tension $\vec{T}$ du fil.

20) En appliquant le principe fondamental de la dynamique à la partie de corde située entre x et $x + dx$, et en le projetant sur l'axe vertical, montrer que $y(x, t)$ vérifie l'équation aux dérivées partielles : $\frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial t^2} = 0$. On donnera l'expression de v en fonction de T_0 et μ .

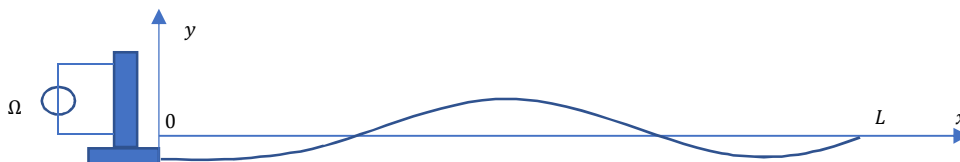
21) Que représente la grandeur v ?

Pour les questions 22 et 23, les deux extrémités de la corde (situées en $x = 0$ et $x = L$) sont fixes. Afin de résoudre l'équation aux dérivées partielles précédente, on propose une solution particulière $y(x, t)$ à variables séparées de la forme $y(x, t) = A \cos(kx - \psi) \cos(\omega t - \varphi)$ où A est une constante avec $v = \frac{\omega}{k}$ et où ω et k sont deux grandeurs réelles et positives appelées respectivement pulsation temporelle et pulsation spatiale de l'onde.

22) Comment qualifier l'onde décrite par l'expression de $y(x, t)$?

23) Montrer que les conditions aux limites imposent une quantification des pulsations ω_n des ondes recherchées avec $\omega_n = \frac{n\pi v}{L}$ où n désigne un entier naturel non nul fixant le rang du mode propre.

Pour les questions 24 et 25, l'extrémité d'abscisse $x = L$ de la corde est fixe et un système exciteur impose à son extrémité d'abscisse $x = 0$ un petit déplacement transversal $y(0, t) = a \cos(\Omega t)$ (avec a constante fixant l'amplitude verticale et Ω fixant la pulsation d'excitation).



Pour décrire le régime forcé, nous cherchons une vibration $y(x, t)$ de pulsation temporelle Ω et satisfaisant les conditions limites.

Pour ce régime forcé établi, on montre que la solution s'écrit :

$$y(x, t) = a \frac{\sin\left(\frac{\Omega}{v}(L - x)\right)}{\sin\left(\frac{\Omega}{v}L\right)} \cos(\Omega t)$$

24) Pour quelles pulsations d'excitation Ω obtient-on des ventres d'amplitude maximale (ici d'amplitude infinie par absence de modélisation des frottements) ?

25) On remarquera une similitude entre les pulsations pour lesquelles il y a résonance en régime sinusoïdal forcé et les pulsations des modes propres. Citer un autre système physique pour lequel on rencontre le même phénomène.

On va maintenant aborder un modèle très simplifié qui assimile le micro-ondes à deux plans métalliques parfaitement conducteurs, parallèles et distants de L . Entre ces deux plans, nous supposons le milieu assimilable au vide de permittivité diélectrique ϵ_0 et de perméabilité magnétique μ_0 .



Le magnétron présent dans le micro-ondes va générer un champ électromagnétique de fréquence $f \approx 2,5 \text{ GHz}$ (cette fréquence a été choisie pour avoir un bon compromis entre la pénétration du champ dans les aliments et sa dissipation sous forme thermique par interaction avec les molécules d'eau). Pour ce modèle simple, le champ électrique qui s'établit dans la cavité est tel que $\vec{E} = E(x, t)\vec{u}_y$. On montre que ce champ électrique vérifie :

- l'équation de propagation suivante : $\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = 0$ où $c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}}$.
- les conditions aux limites suivantes : $E(0^-, t) = E(0^+, t) = E(L^-, t) = E(L^+, t) = 0$.

26) Justifier les conditions aux limites imposées au champ électrique.

27) En s'inspirant des résultats concernant la corde vibrante, exprimer puis calculer la valeur de L qui permet l'établissement du mode de vibration de rang 5 correspondant à la fréquence 2,5 GHz.

28) Expliquer la présence nécessaire d'un plateau tournant dans un micro-onde si l'on suppose l'établissement du seul mode de vibration de rang 5.

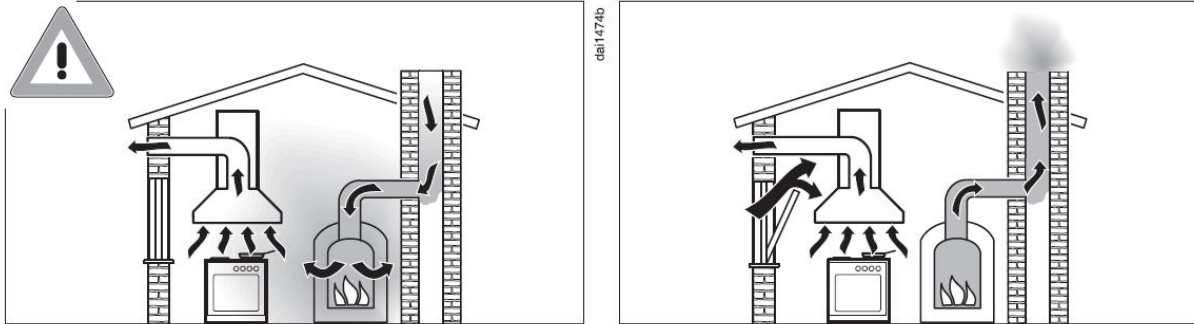
3^e partie : Etude d'une hotte aspirante

L'installation d'une hotte aspirante placée au-dessus d'une plaque de cuisson nécessite une réflexion avant achat. Par exemple, il convient d'apprécier le débit volumique d'air que le dispositif peut traiter afin de renouveler convenablement les gaz présents dans la cuisine.

A) Généralités

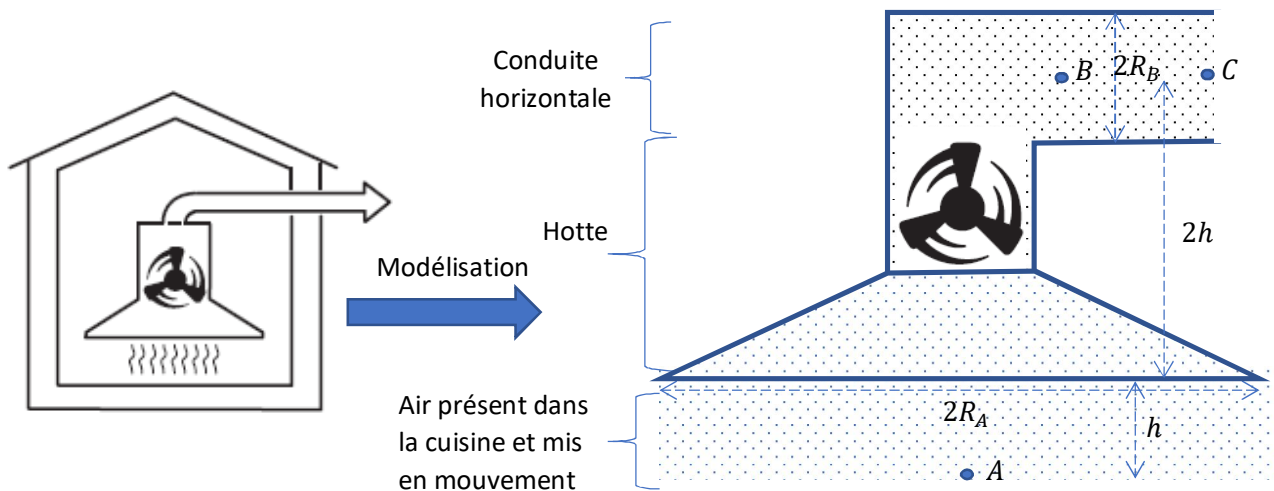
29) Pour assurer un bon renouvellement de l'air d'une cuisine, la hotte doit pouvoir déplacer 10 fois par heure le volume d'air de votre cuisine. Estimer le débit volumique D_v que la hotte doit imposer pour une cuisine de surface 20 m^2 et de $2,5 \text{ m}$ de hauteur de plafond.

30) Dans la documentation donnée par le constructeur MIELE™, on retrouve le schéma ci-dessous pour un système d'évacuation d'air vers l'extérieur. Expliquer, succinctement et clairement, pourquoi l'une des deux installations n'est pas acceptable.



Dans la suite, nous allons chercher à évaluer la puissance P_u qu'une hotte doit fournir à l'air ambiant pour qu'il soit évacué vers l'extérieur avec un débit volumique D_v . Nous travaillerons avec les hypothèses suivantes (dans le référentiel supposé galiléen lié à la cuisine où le champ de pesanteur terrestre est $g \approx 10 \text{ m.s}^{-2}$) :

- On négligera, dans un premier temps, la viscosité du gaz (et tout autre phénomène de diffusion).
- L'écoulement étudié est stationnaire et sa vitesse suffisamment faible pour considérer le fluide de masse volumique ρ uniforme.
- Le moteur de la hotte, avec ses pales, impose un écoulement contenu au sein même de la hotte, dans une canalisation horizontale menant le gaz à l'extérieur mais aussi dans un cylindre de hauteur h situé sous la hotte. Ce cylindre, de rayon R_A , est de même axe de symétrie de révolution que celui de la hotte (cf. schéma suivant).
- Les points B et C appartiennent à une même ligne de courant.
- En dehors de l'écoulement, l'air de la cuisine est au repos, à la pression atmosphérique $P_0 = 1 \text{ bar}$ et à la température $T_0 = 300 \text{ K}$.



B) Etude entre les points B et C

Le fluide étudié est dans la canalisation horizontale de rayon R_B constante. Le champ des vitesses est supposé horizontal et uniforme sur chaque section droite de cette canalisation. Les points B et C sont sur une même horizontale. Le point C, à l'extérieur, est à la pression atmosphérique. On note v_B et P_B la vitesse et la pression en B et v_C et P_C la vitesse et la pression en C.

31) Quelle est la relation entre v_B et v_C ? Justifier.

32) Démontrer en tenant compte des hypothèses que $P_B = P_0$.

C) Etude entre les points A et B

33) On a $R_A = 4R_B$. Justifier que $v_A \ll v_B$.

34) En effectuant un bilan de puissance entre A et B, on montre que :

$$\frac{P_B - P_A}{\rho} + \frac{v_B^2 - v_A^2}{2} + g(z_B - z_A) = \frac{P_u}{\rho D_v}$$

Préciser en quoi ce bilan se distingue de celui effectué avec la relation de Bernoulli appliquée à un écoulement conservatif.

35) Démontrer que $P_u \approx \rho D_v \left(3gh + \frac{D_v^2}{2(\pi R_B^2)^2} \right)$

D) Bilan et analyse

36) En utilisant le modèle du gaz parfait, exprimer puis calculer la masse volumique ρ du gaz étudié. On donne sa masse molaire $M \approx 30 \text{ g.mol}^{-1}$ et on prend $R \approx 10 \text{ J.K}^{-1}.\text{mol}^{-1}$.

37) On considère : $h = 0,5 \text{ m}$, $R_B = 0,1 \text{ m}$, $D_v = 0,1 \text{ m}^3.\text{s}^{-1}$. Estimer la valeur de P_u . Cette valeur est-elle réaliste pour une hotte de cuisine ?

Une hotte doit aussi permettre le filtrage de l'air aspiré. Un filtre est alors placé en entrée de la hotte. Les molécules constituant le filtre retiennent certaines particules et l'air aspiré devient alors de meilleure qualité. La présence du filtre impose cependant de prendre en compte la viscosité de l'air qui entraîne un phénomène de perte de charge important entre les points A et B.

38) Pour un filtre encrassé utilisé en cuisine, on a un travail massique lié aux forces de viscosité de 1000 J.kg^{-1} . Estimer la puissance P_f que le moteur doit fournir pour cette seule perte de charge (on prendra encore $D_v = 0,1 \text{ m}^3.\text{s}^{-1}$). Conclure.

4^e partie : Temps de cuisson d'un poulet dans un four

Soit $T(M, t)$ le champ des températures dans une phase condensée, solide, idéale et homogène de masse volumique ρ , de capacité thermique massique c , de conductivité thermique λ . Lorsque ce matériau appelé (P) est uniquement le siège d'un phénomène de conduction thermique, alors l'évolution spatio-temporelle de la température vérifie l'équation de la chaleur ci-dessous (où Δ est l'opérateur Laplacien) : $\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\lambda}{\rho c} \Delta T$

Si on chauffe la surface de (P) pendant une durée τ , la conduction thermique modifie le champ initial des températures de (P) sur une distance caractéristique δ .

- 39) A l'aide d'une analyse dimensionnelle de l'équation de la chaleur, montrer que $\tau = K_1 \delta^2$ où K_1 est une constante que l'on exprimera en fonction des constantes de l'énoncé.

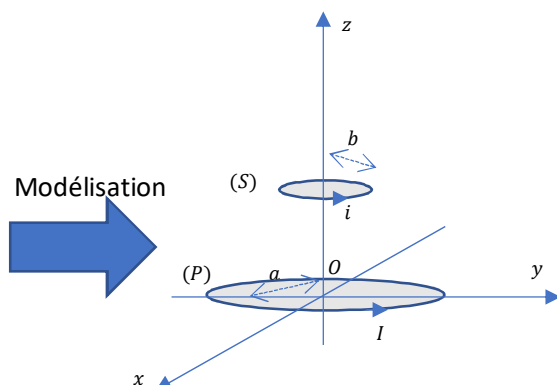
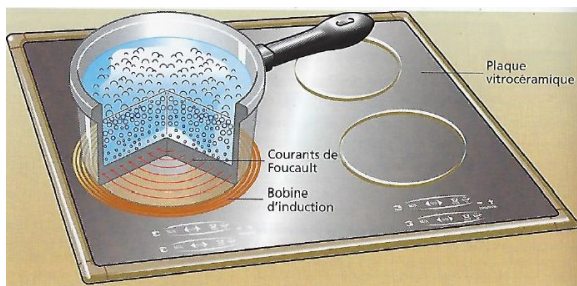
La question suivante n'est pas guidée et demande de l'initiative de la part du candidat. Une rédaction complète et soignée de la problématique posée est attendue, et toutes les pistes de recherche explorées par le candidat doivent être consignées sur sa copie. Si elles sont pertinentes, elles seront valorisées. Il est conseillé au candidat de ne pas excéder 10 minutes de réflexion sur cette question.

- 40) Monsieur X sait qu'un poulet de 1 kg doit être cuit pendant 1 h pour un réglage donné de son four. En indiquant vos hypothèses, estimer le temps de cuisson nécessaire pour un poulet de 2 kg en conservant le même réglage du four. On donne $2^{\frac{2}{3}} \approx 1,6$.



- 5^e partie : Etude d'une plaque à induction

Une plaque à induction rayonne un champ magnétique. Nous allons supposer, pour simplifier, que ce champ magnétique est analogue à celui créé par une bobine circulaire (P) comportant N spires d'axe Oz , filiformes, jointives et de rayon a . L'épaisseur des spires est négligeable, de sorte que les centres des spires peuvent être considérés comme superposés au même point O . Cette bobine (P) est parcourue par un courant sinusoïdal d'intensité $I(t) = I_0 \sin(\omega t)$ et de fréquence $f = \frac{\omega}{2\pi}$. La casserole métallique posée sur la plaque à induction sera modélisée par une spire (S) circulaire de rayon $b < a$. Elle est parcourue par un courant induit d'intensité $i(t)$, elle est de masse m , d'axe Oz et sera repérée par sa cote constante $z = z_0 > 0$. Dans tout le problème, on se placera dans l'approximation des régimes stationnaires. Les sens des courants électriques sur le schéma ci-dessous donnent les sens d'orientation des spires.



A) Principe du chauffage inductif

Uniquement dans cette partie A, nous admettrons les hypothèses simplificatrices suivantes :

- (P) rayonne un champ magnétique suivant l'axe Oz donné par $\vec{B} = B_0 \sin(\omega t) \vec{u}_z$ où B_0 est une constante,
- la spire (S), dont on néglige l'inductance propre, possède une résistance électrique notée R .

41) Donner l'expression du flux ϕ du champ magnétique rayonné par (P) à travers (S).

42) En déduire l'expression de la tension induite e apparaissant dans S.

43) Montrer que le courant induit i s'écrit sous la forme $i(t) = K_2 \omega \cos(\omega t)$. On donnera l'expression de K_2 en fonction des constantes du sujet.

44) Donner l'expression de la puissance instantanée $\mathcal{P}(t)$ dissipée par effet Joule par (S).

45) Justifier alors que l'expression de la puissance moyenne $\mathcal{P}_{moy}$ dissipée par effet Joule par (S) est $\mathcal{P}_{moy} = \frac{(\omega B_0 \pi b^2)^2}{2R}$.

46) Expliquer pourquoi certaines casseroles ne peuvent pas être utilisées avec ce mode de chauffage par induction.

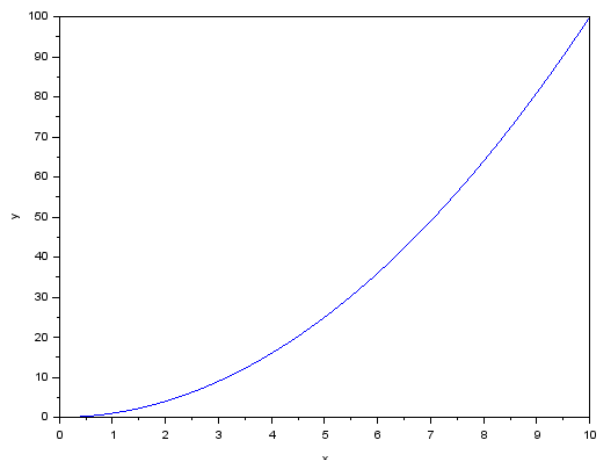
47) Les valeurs de z_0 , a et b sont du même ordre de grandeur (quelques centimètres). Exprimer la condition imposée à la fréquence f de travail permettant d'appliquer l'approximation des régimes quasi-stationnaires (on admettra que les perméabilité magnétique et permittivité diélectrique du milieu associées au système étudié sont assimilables à celles du vide).

B) Force magnétique

En tenant compte de l'inductance propre associée à (S) et en prenant une description plus complète du champ magnétique créé par (P), on montre que (S) est soumise à une force de Laplace $\vec{F}$ dont la moyenne temporelle $\langle \vec{F} \rangle$ est donnée par : $\langle \vec{F} \rangle \approx K_3 \frac{Z}{(1+Z^2)^4} \vec{u}_z$ avec $Z = \frac{z}{a}$ et $K_3 \approx 1 \text{ N}$.

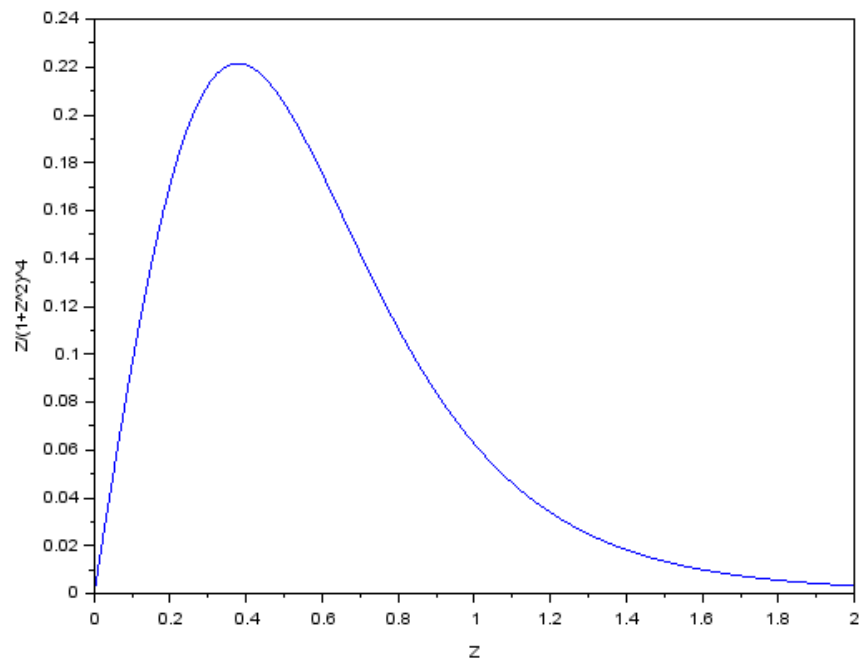
On souhaite apprécier la valeur maximale de la force de Laplace pouvant s'exercer sur (S). Pour cela, on va utiliser l'outil informatique. On donne ci-dessous un exemple de programmation sous Scilab permettant d'obtenir le graphe de la fonction x^2 .

```
1 function y=f(x)
2     y=x^2
3 endfunction
4 x=linspace(0,10,100)
5 plot(x,f)
6 xlabel("x"); ylabel("y")
```



48) Réécrire le programme précédent sur votre copie en l'adaptant afin d'obtenir le graphe de $\frac{Z}{(1+Z^2)^4}$ en fonction de Z pour $Z \in [0,2]$ en utilisant 100 points (les axes devront également être renommés).

On obtient alors le résultat ci-dessous :



49) Estimer la valeur maximale de la force de Laplace qu'exerce (P) sur (S).

50) Justifier que la lévitation d'une casserole est impossible.

