

Note au candidat

- Les vecteurs sont notés en caractères **gras** dans le texte.
- Le sujet est divisé en 3 problèmes indépendants.
- Il est vivement conseillé au candidat de lire préalablement l'intégralité du sujet.
- Il sera tenu compte de la clarté, de la précision ainsi que de la concision de la rédaction.

PREMIER PROBLEME

LANCER DE POIDS

Un athlète, de hauteur H bras levé, lance un poids de masse m avec une vitesse initiale $\mathbf{v}_0$ située dans le plan yOz , sous l'angle α par rapport au sol (cf. figure 1).

Le but de ce problème est d'étudier la modélisation d'un lancer puis de déterminer les conditions du « meilleur lancer ».

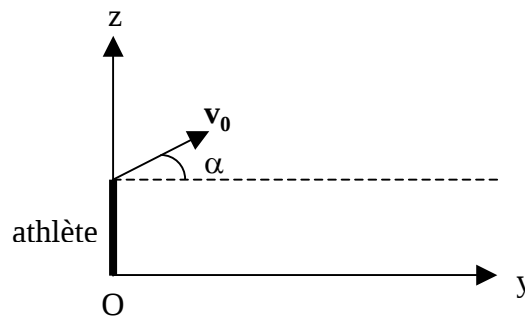


Figure 1.

La surface de la Terre, horizontale et plane, est confondue avec le plan (Ox, Oy) . Le trièdre orthonormé (Ox, Oy, Oz) lié au sol terrestre sera supposé galiléen. L'intensité g_0 du champ de pesanteur terrestre est considérée comme constante.

Pour les applications numériques on prendra : $m = 5 \text{ kg}$, $v_0 = 10 \text{ m.s}^{-1}$, $g_0 = 10 \text{ m.s}^{-2}$ et $H = 2 \text{ m}$.

1 Etude du lancer

On suppose que le poids n'est soumis qu'à la force de pesanteur.

1.1 Déterminer la nature du mouvement du poids selon l'axe Oy .

1.2 Exprimer, en fonction de v_0 , g_0 et α , la durée T_s nécessaire pour que le poids atteigne le sommet S de sa trajectoire.

On note (y_s, z_s) les coordonnées du sommet S de la trajectoire du poids.

- 1.3 Etablir l'expression de la coordonnée y_S .
- 1.4 Enoncer le théorème de l'énergie mécanique.
- 1.5 Calculer l'énergie mécanique du poids à l'instant où il quitte la main de l'athlète. On supposera l'énergie potentielle du poids nulle au niveau du sol.
- 1.6 En utilisant les résultats des questions 4 et 5, déterminer l'expression de la coordonnée z_S .
- 1.7 Retrouver le résultat de la question précédente par une autre méthode.
- 1.8 Application numérique : pour le cas $\alpha = 30^\circ$, calculer les valeurs numériques de T_S , y_S et z_S .

2 Détermination du meilleur lancer

On cherche à déterminer l'angle α_m qui réalise le meilleur lancer pour une vitesse initiale v_0 fixée. On suppose α compris entre 0 et $\pi/2$.

- 2.1 Etablir l'équation du second ordre régissant la coordonnée y_C du point de chute du poids sur le sol. On mettra cette équation sous la forme : $A.y_C^2 + B.y_C + C = 0$, avec $A = g_0/(2.v_0^2)$, B et C étant des paramètres ne dépendant que de H et α .
- 2.2 Etablir l'expression de $dy_C/d\alpha$ en fonction de y_C , H, α , v_0 et g_0 .
- 2.3 En déduire l'expression du meilleur lancer $y_C = y_{Cm}$ en fonction de H, $\sin(\alpha_m)$ et $\cos(\alpha_m)$.
- 2.4 Montrer que $\tan^2(\alpha_m)$ peut se mettre sous la forme : $\tan^2(\alpha_m) = \frac{1}{1+a.H}$, où a est une constante ne dépendant que de g_0 et v_0 .
- 2.5 Etablir l'expression de y_{Cm} en fonction de H, g_0 , et v_0 . On pourra préalablement exprimer y_{Cm} en fonction de $\tan(\alpha_m)$ à partir du résultat de la question 2.3, puis utiliser le résultat de la question précédente.
- 2.6 Etudier qualitativement l'influence de la taille de l'athlète sur le meilleur lancer.
- 2.7 Application numérique : calculer y_{Cm} à partir des données du problème.

DEUXIEME PROBLEME

ARC-EN-CIEL

L'objectif de ce problème est d'expliquer le phénomène de l'arc-en-ciel qui a lieu dans les conditions grossièrement décrites par la figure 2 ci-dessous.

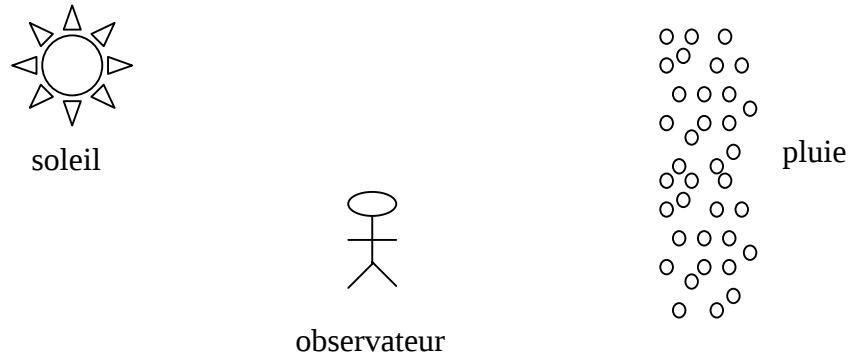


Figure 2.

3 Question préliminaire

3.1 Dans quelle direction regarde l'observateur pour apercevoir l'arc-en-ciel ?

4 Modélisation

Dans un premier temps, on s'intéresse au parcours des rayons du soleil dans une goutte d'eau modélisée par une sphère, de centre O et de rayon R , qu'on supposera immobile dans l'air. Cette goutte est éclairée par un faisceau de lumière parallèle dont un rayon $x'A$ atteint la sphère en A où il se réfracte. On pose $(\vec{OA}, \vec{Ax'}) = i$ et $(\vec{AO}, \vec{AB}) = r$, les angles d'incidence et de réfraction (cf. figure 3).

Soit B le point où le rayon réfracté rencontre la sphère. En B la lumière peut être soit réfractée soit réfléchi, mais on ne considère ici que le rayon réfléchi. Le rayon réfléchi en B rencontre de nouveau la sphère en C où il se réfracte selon Cy . On note $\alpha = (\vec{OX'}, \vec{Cy})$.

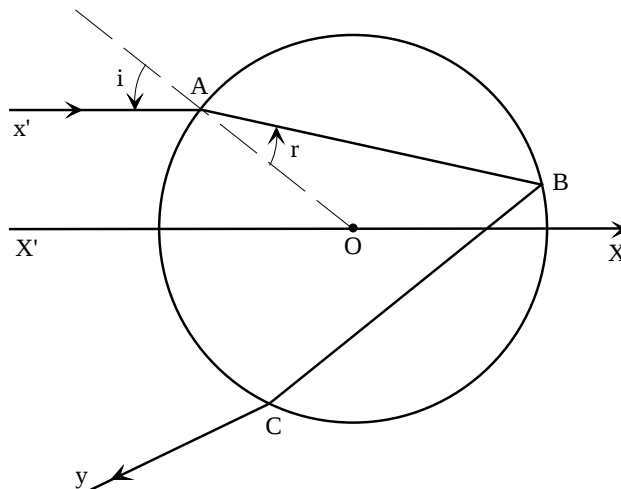


Figure 3.

On note n l'indice de réfraction de la goutte.

Dans un premier temps, on suppose que la lumière incidente est monochromatique de longueur d'onde λ .

Dans les questions qui suivent, on analyse la pertinence du modèle proposé. Les réponses aux questions se doivent d'être claires et concises.

- 4.1 Donner un ordre de grandeur de λ .
- 4.2 Etablir une approximation portant sur R et λ à partir de laquelle on peut négliger le phénomène de diffraction et ainsi assimiler la lumière traversant la goutte à des rayons lumineux (hypothèse de l'optique géométrique).
Cette approximation vous semble-t-elle valable dans le cas présent ?

5 Etude quantitative avec n constant

Le modèle étant supposé pertinent, on se propose maintenant de quantifier le phénomène de l'arc-en-ciel. On commence par supposer n constant et on cherche à analyser les conséquences des variations de i .

- 5.1 A quelle condition sur l'angle r existe-t-il dans la goutte une réflexion totale en B ?
- 5.2 Déterminer l'expression de α en fonction des angles r et i .
- 5.3 Etablir l'expression de la dérivée partielle $\partial\alpha/\partial i$ en fonction de $\partial r/\partial i$.
- 5.4 En déduire la valeur numérique de $\partial r/\partial i = (\partial r/\partial i)_E$ pour laquelle α est extremum.

Dans la suite du problème, on admettra que l'intensité lumineuse réfléchie par la goutte est maximale lorsque α passe par son extremum.

- 5.5 A partir d'une des lois de Descartes, déterminer l'expression de $\partial r/\partial i$ en fonction i , n et r .
- 5.6 Etablir l'expression de $\cos(i_E)$, où i_E est la valeur de i pour laquelle α est extremum.
- 5.7 Etablir l'expression de $\cos(r_E)$, où r_E est la valeur de r pour laquelle α est extremum.
- 5.8 En déduire l'expression de l'extremum de α , α_E , en fonction de n .

6 Rôle du phénomène de dispersion

En fait l'indice de réfraction n dépend de la longueur d'onde de la lumière incidente (phénomène de dispersion). Dans le rouge, $n = n_{\text{rouge}} = 1,331$ et dans le violet, $n = n_{\text{violet}} = 1,337$.

- 6.1 Indiquer la position des longueurs d'onde du rouge et du violet dans le spectre visible.
- 6.2 Donner un autre exemple de milieu dispersif.

- 6.3 Calculer les valeurs numériques de α_E lorsque $n = n_{\text{rouge}}$ et $n = n_{\text{violet}}$.
- 6.4 La partie extérieure d'un arc-en-ciel est-elle rouge ou violette ?
- 6.5 En raisonnant sur les symétries du problème, expliquer la forme en arc de cercle d'un arc-en-ciel.
Faire un schéma s'inspirant de la figure 4 décrivant le phénomène de l'arc-en-ciel.
- Dans certaines conditions, l'observateur peut discerner deux arcs-en-ciel l'un au dessus l'autre.
- 6.6 Expliquer ce phénomène.

TROISIEME PROBLEME

MODELISATION D'UN BOBINAGE

Dans ce problème, on cherche à modéliser un bobinage électrique dans le but de déterminer les valeurs des paramètres du modèle qui permettent à ce bobinage de fournir un champ magnétique d'environ 1 Tesla.

Le bobinage est assimilable au solénoïde épais représenté sur la figure 4.

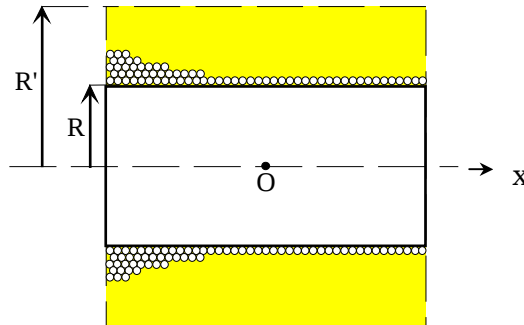


Figure 4.

On donne : $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ H.m}^{-1}$.

7 Spire circulaire

Dans un premier temps on s'intéresse à une spire circulaire, de centre O et d'axe Ox. Cette spire de rayon R, est contenue dans le plan Oyz orthogonal à son axe Ox. Elle est parcourue par un courant d'intensité constante I.

- 7.1 En raisonnant sur les symétries du problème et en choisissant un sens de parcours du courant dans la spire, déterminer la direction du champ magnétique $\mathbf{B}_{\text{Sp}}(\mathbf{O})$ créé au centre de la spire.
- 7.2 Représenter l'allure des lignes du champ magnétique créées par la spire.
- 7.3 Enoncer la loi de Biot-Savart.
- 7.4 Déterminer l'intensité $B_{\text{Sp}}(\mathbf{O})$ du champ magnétique au centre de la spire.
- 7.5 Application numérique : on fixe $R = 5 \text{ cm}$. Calculer la valeur de I pour avoir $B_{\text{Sp}}(\mathbf{O}) = 1 \text{ T}$. Conclusion ?
- 7.6 En raisonnant sur les symétries du problème et en choisissant un sens de parcours du courant dans la spire, déterminer la direction et l'intensité du champ magnétique $\mathbf{B}_{\text{Sp}}(\mathbf{M})$ créé par cette spire en un point M de l'axe Ox.
On exprimera $B_{\text{Sp}}(\mathbf{M})$ en fonction de l'angle θ sous lequel est vu le rayon R depuis le point M.

8 Solénoïde

On considère maintenant un solénoïde de longueur L , formé de N spires jointives identiques de rayon R parcourues par l'intensité I . On note n le nombre de spires par unité de longueur.

- 8.1 Déterminer le champ élémentaire $dB_{SO}(M)$ créé en un point M de l'axe du solénoïde par une tranche élémentaire de $n \cdot dx$ spires jointives en fonction de l'angle θ sous lequel est vu cette tranche depuis le point M .
- 8.2 En déduire l'expression de $B_{SO}(M)$ en fonction de μ_0 , I , n et des angles θ_1 et θ_2 sous lesquels on voit les deux faces du solénoïde depuis le point M .
- 8.3 Exprimer le champ magnétique $B_{SO}(O)$ au centre du solénoïde en fonction de μ_0 , I , n , L et R .

9 Solénoïde épais

On superpose maintenant plusieurs couches de spires qu'on pourra considérer comme des solénoïdes jointifs ayant même nombre n de spires par unité de longueur, coaxiaux, de rayon r variant de R à R' (cf. figure 4). Toutes ces spires sont parcourues par le même courant I circulant dans le même sens. On note n' le nombre de solénoïdes par unité d'épaisseur.

- 9.1 Exprimer le champ élémentaire $dB_S(O)$ créé au centre O par les couches comprises entre r et $r + dr$.
- 9.2 En déduire le champ magnétique $B_S(O)$ créé en O .
On rappelle que
$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \ln \left(\frac{x_2 + \sqrt{1+x_2^2}}{x_1 + \sqrt{1+x_1^2}} \right).$$
- 9.3 Avec $L = 2 R' = 4 R$, montrer que $B_S(O) \approx 0,2 \mu_0 n n' L I$.
- 9.4 Application numérique : on souhaite obtenir en O un champ de 1 Tesla avec $I = 30 \text{ A}$ et $L = 10 \text{ cm}$. Calculer le nombre total N' de spires puis la longueur totale du fil nécessaire.

*****Fin de l'épreuve*****